

BEATA KAJTANOWSKA*

Zastosowanie modelu fali dyfuzyjnej do symulacji przepływów w systemie rzeczonym

1. Wstęp

Przepływ wody w korytach otwartych charakteryzuje się występowaniem dwóch rodzajów ruchu: ruchu ustalonego występującego wtedy, gdy wartości natężenia przepływu, napelnienia koryta i prędkości przepływu wody są stałe w czasie, oraz ruchu nieustalonego, gdy powyższe wielkości zmieniają się w funkcji czasu. Należy tu nadmienić, że z ruchem nieustalonym mamy do czynienia zawsze w przypadku ruchu wody w rzekach, kanałach itp. W ruchu nieustalonym wyróżniamy ruch wolnozmienny, w którym składowe pionowe przyspieszeń są bardzo małe (pomijalne) oraz ruch szybkozmienny, w którym tak nie jest.

Przedmiotem rozważań jest zastosowanie modelu fali dyfuzyjnej do symulacji przepływów w systemie rzeczonym, zaś ich celem jest próba oceny tego modelu pod kątem wykorzystania go do opisu ruchu nieustalonego wolnozmiennego w skomplikowanej sieci kanałów.

Rozważania obejmują rozgałęzienny system pryzmatycznych kanałów otwartych, w którym odbywa się ruch nieustalony, wolnozmienny (np. przepływ fali powodziowej), natomiast zmian przepływu w kanałach energetycznych spowodowanych np. gwałtownym spadkiem lub wzrostem mocy silowni wodnych nie uwzględnia się, ponieważ zmiany te mają charakter szybkozmienny.

2. Sformułowanie matematyczne

Ruch nieustalony, wolnozmienny opisujemy za pomocą układu równań De Saint Venanta, składającego się z równania zachowania masy – ciągłości ruchu (1) oraz równania zachowania pędu – równania dynamicznego (2).

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1)$$

*mgr inż. Beata KAJTANOWSKA, Politechnika Gdańska, Wydział Budownictwa Lądowego, ul. Majakowskiego 11, 80-952 Gdańsk

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g J - g i_0 + \frac{vq}{F} = 0 \quad (2)$$

Przyjęte oznaczenia:

- Q - natężenie przepływu [m^3/s],
- H - rzędna zwierciadła wody [m],
- v - prędkość przepływu wody [m/s],
- α - współczynnik De Saint Venanta,
- g - przyspieszenie ziemskie [m/s^2],
- F - powierzchnia przekroju czynnego kanału [m^2],
- J - spadek linii energii,
- i_0 - spadek dna,
- q - zasilanie boczne [$\text{m}^3/\text{s}\cdot\text{mb}$].

Prędkość przepływu wody definiowana jest jako:

$$v = \frac{Q}{F} \quad (3)$$

Równania (1) i (2) składają się na nieliniowy układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, typu hiperbolicznego. Zmienne, x - położenie i t - czas, są niezależne, natomiast $H(x, t)$ i $Q(x, t)$, po wyeliminowaniu funkcji $v(x, t)$ dzięki zastosowaniu równania (3), są poszukiwanymi funkcjami.

Ze względu na znaczny stopień skomplikowania równań (1) i (2) do obliczeń ruchu wody w kanałach otwartych stosuje się często uproszczenia. Uproszczenia te polegają na pominięciu poszczególnych członów równania (2). I tak, przy pominięciu członów $\frac{\partial v}{\partial t}$ i $\alpha v \frac{\partial v}{\partial x}$ (człon pionowych składowych prędkości i człon bezwładności można pominąć ze względu na stosunkowo małą wartość) otrzymujemy tzw. model nieliniowej fali dyfuzyjnej. Równanie (2) przyjmuje wtedy postać:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + g J - g i_0 + \frac{vq}{F} = 0 \quad (4)$$

Po wykonaniu przekształceń polegających na eliminacji niewiadomej funkcji napęnienia koryta H , otrzymujemy równanie, mające postać równania dyfuzji:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - b \frac{\partial Q}{\partial x} + c Q \quad (5)$$

gdzie: $a = \frac{K^2}{2QB}$; $b = \frac{Q}{BK} \frac{\partial K}{\partial h}$; $c = \frac{q}{BK} \frac{\partial K}{\partial H}$

B - szerokość zwierciadła wody w kanale [m],

K - moduł przepływu wyrażony wzorem: $K = \frac{1}{n} R^{2/3} F$

gdzie:

n - współczynnik szorstkości wg Manninga,

R - promień hydrauliczny [m], $R = \frac{F}{Ob}$,

Ob - obwód zwilżony kanału [m].

Człon pierwszy prawej strony równania (5) ze współczynnikiem a , nosi nazwę członu dyfuzyjnego, człon drugi ze współczynnikiem b - członu konwekcyjnego, natomiast człon trzeci ze współczynnikiem c jest członem źródłowym.

Ponieważ współczynniki a , b , c są zależne od natężenia przepływu Q , stąd równanie (5) jest w istocie równaniem nieliniowym, typu parabolicznego z jedną niewiadomą i przy znajomości warunków granicznych może być rozwiązane. Rozwiązania analityczne tego równania można uzyskać dla uproszczonych warunków brzegowych. W przypadkach bardziej złożonych trzeba stosować metody numeryczne.

3. Opis metody rozwiązania

Zastosowaną metodą numeryczną jest metoda różnic skończonych, której istotą jest zamiana równania różniczkowego na układ równań różnicowych i rozwiązanie tego układu.

Równania różnicowe, będące analogami rozwiązywanego równania różniczkowego, otrzymuje się zastępując pochodne w równaniu różniczkowym odpowiednimi ilorazami różnicowymi, a więc ciągły obszar zmienności niewiadomej funkcji $Q(x, t)$ zastąpiony zostaje prostokątną siatką węzłów (rys. 1), zbudowaną z odcinków linii prostych, równoległych do osi x oraz t , przy czym linie równoległe do osi t określają położenie przekrojów poprzecznych wzdłuż cieku, natomiast linie równoległe do osi x reprezentują poziomy czasowe odległe od siebie o Δt .

Wartości przepływu w węzłach $j = 1, i = 1, \dots, n$ są znane z warunku początkowego $Q(x, t = 0)$. Na brzegach $i = 1$ oraz $i = n$ dla wszystkich $j = 1, \dots, j_{\max}$ wymuszenia przepływu są określone poprzez funkcje $Q(x = 0, t)$ oraz $Q(x = L, t)$, będące warunkami brzegowymi. Ilustruje to rys. 1, na którym węzły, w których wartości przepływu są znane, narysowano pogrubioną linią.

Zadanie polega więc na znalezieniu wartości przepływu we wszystkich pozostałych węzłach siatki $i = 2, \dots, n - 1$ oraz $j = 2, \dots, j_{\max}$.

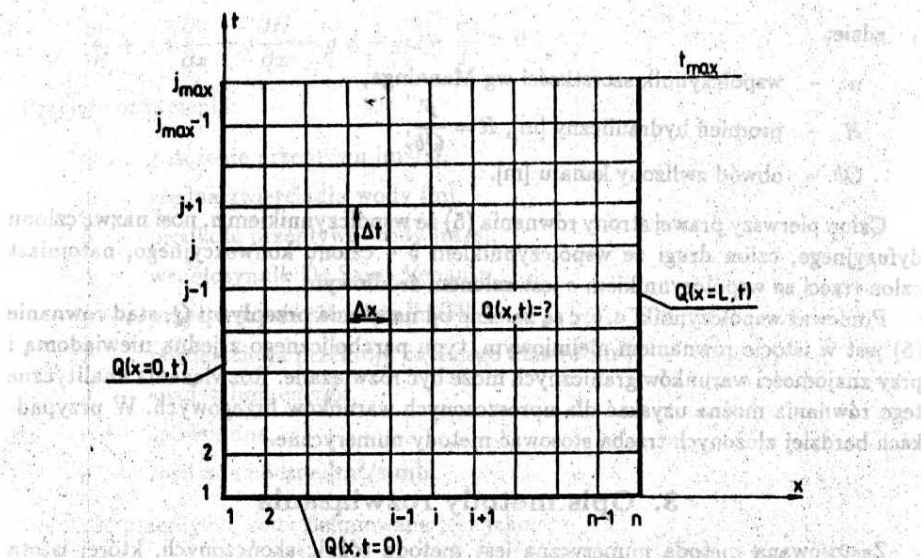
Po odpowiedniej aproksymacji pochodnych cząstkowych występujących w równaniu (5) ilorazami różnicowymi otrzymujemy:

$$Q_i^{j+1} = A_1 Q_i^j + A_2 Q_{i-1}^j + A_3 Q_{i+1}^j \quad (6)$$

gdzie:

$$A_1 = 1 + c\Delta t - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} - b \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

$$A_2 = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{b\Delta t}{\Delta x},$$



Rys. 1. Siatka węzłów obliczeniowych w obszarze (x, t)

$$A_3 = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$$

Współczynniki a, b, c zostały określone równaniem (5).

Jak widać, uzyskano aproksymację równania modelu fali dyfuzyjnej (5) za pomocą jawnego schematu różnicowego, ponieważ w równaniu (6) występuje tylko jedna niewiadoma - Q_i^{j+1} . Stosując to równanie dla dowolnego j można otrzymać wartości przepływu dla $j+1$ we wszystkich punktach i . Powtarzając to postępowanie dla $j = 1, \dots, j_{\max}$ oraz $i = 1, \dots, n-1$ otrzymamy wartości przepływu w całym obszarze (x, t) .

Opisany wyżej schemat uzyskany został przy założeniu aproksymacji pochodnej względem drogi na poziomie j .

W przypadku zastosowania aproksymacji pochodnej na poziomie $j+1$ otrzymujemy przybliżenie równania (5) za pomocą niejawnego schematu metody różnic skończonych:

$$A \cdot Q_{i-1}^{j+1} - B \cdot Q_i^{j+1} + C \cdot Q_{i+1}^{j+1} = -Q_i^j; \quad (7)$$

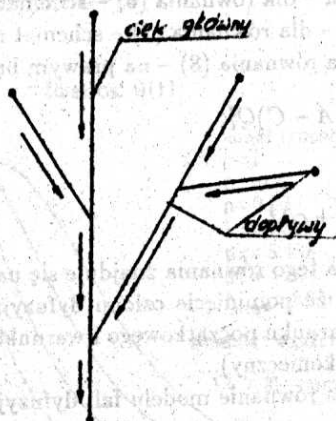
gdzie:

$$A = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{b\Delta t}{\Delta x},$$

$$B = 1 + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} + b \frac{\Delta t}{\Delta x} - c\Delta t,$$

$$C = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$$

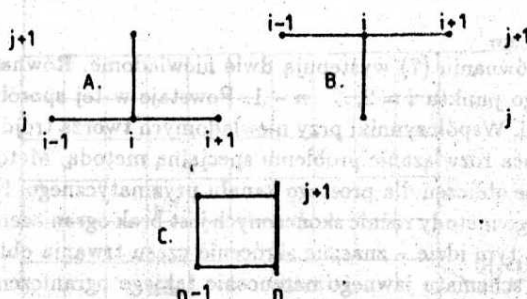
Jak widać, w równaniu (7) występują dwie niewiadome. Równanie takie możemy napisać dla każdego punktu $i = 2, \dots, n - 1$. Powstaje w ten sposób układ n równań z $2n$ niewiadomymi. Współczynniki przy niewiadomych tworzą trójdiagonalną macierz pasmową, co narzuca rozwiązanie problemu specjalną metodą. Metoda ta pozwala jedynie na wykonanie obliczeń dla prostego kanału pryzmatycznego. Niewątpliwą zaletą schematu niejawnego metody różnic skończonych jest brak ograniczenia wielkości kroku czasowego, a co za tym idzie – znaczne skrócenie czasu trwania obliczeń. Przy stosowaniu do obliczeń schematu jawnego narzucenie takiego ograniczenia jest konieczne, ze względu na możliwość utraty stabilności rozwiązania, co objawia się lawinowym wzrostem błędów zaokrągleń.



Rys. 2. Schemat systemu obliczeniowego. Strzałkami oznaczono kierunek przepływu wody w systemie

Rozważaniami objęty został układ kanałów przedstawiony na rys. 2 – rozgałęziony system pryzmatycznych kanałów otwartych. System składa się z cieków głównego wraz z dopływami usytuowanymi w dowolny sposób. Na początku każdego kanału oraz w ostatnim przekroju ograniczającym system znane są wartości przepływu wody. Zadanie polega więc na znalezieniu wartości przepływu wody we wszystkich punktach wewnętrznych systemu w dowolnym czasie.

Rozwiązywanie równania modelu fali dyfuzyjnej wg wyżej podanych zasad wymaga określenia z góry wymuszenia przepływu na brzegu prawym (w ostatnim przekroju systemu). Narzuca nam to budowa równań składających się na jawny i niejawni schemat metody różnic skończonych – patrz równanie (6) i (7) oraz rys. 3 a, b. Bardzo często jednak musimy kończyć obliczenia w przekroju, w którym występuje swobodny odpływ wody. Jest to przypadek najczęściej występujący i przy tym najbardziej interesujący. Odzwierciedlenie tej sytuacji uzyskano posługując się schematem uproszczonym. Przyjęto, że wartości przepływu na brzegu prawym obliczane będą na podstawie równania modelu fali dyfuzyjnej z pominiętym członem dyfuzyjnym:



Rys. 3. Schematy obliczeniowe:

- a - dla równania (6) - schemat jawny
 b - dla równania (7) - schemat niejawny
 c - dla równania (8) - na prawym brzegu kanału

$$Q_i^{j+1} = C Q_{i-1}^j + (A - C) Q_i^j, \quad (8)$$

gdzie:

$$C = \frac{b\Delta t}{\Delta x}; \quad A = 1 + c\Delta t.$$

Schemat obliczeniowy dla tego równania znajduje się na rys. 3c.

Należy tu zauważyć, że pominięcie członu dyfuzyjnego pozwala na prowadzenie obliczeń po określeniu warunku początkowego i warunku brzegowego lewego (warunek brzegowy prawy nie jest konieczny).

Wyżej stwierdzono, że równanie modelu fali dyfuzyjnej jest w rzeczywistości równaniem nieliniowym typu parabolicznego z jedną niewiadomą - wartością przepływu. Opisane dotychczas metody rozwiązania opierają się na linearyzacji tego równania w każdym kroku czasowym, ponieważ wartości współczynników a , b , c zależne od zmiennej wartości przepływu i zmiennych parametrów przekroju są obliczane na podstawie wartości z poprzedniego kroku czasowego. Pełne zlinearyzowanie równania fali dyfuzyjnej sprowadza się praktycznie do przyjęcia stałych wartości liczbowych współczynników a , b , c dla całego przedziału czasu. Możliwość pełnej linearyzacji powyższego równania uwzględniono w schemacie niejawnym. Przyjęto, że wartości współczynników a , b , c powinny być określone w danych, a ich wielkości obliczone dla przepływu średniego.

Poniżej zamieszczono trzy przykłady obliczeń ilustrujące możliwości programu na EMC i będące próbą weryfikacji modelu fali dyfuzyjnej do opisu ruchu nieustalonego, wolnozmiennego w kanałach otwartych.

4. Przykłady

W pierwszych dwóch przykładach (rys. 4, 5, 6, 7) dokonano o obliczeń dla prostego kanału pryzmatycznego o stałych parametrach przekroju: nachylenie skarp wynosi 1 : 2, szerokość kanału w dnie - 10 m, współczynnik szorstkości - 0,03, spadek dna $i = 0,0005$. Jako warunek brzegowy lewy została zadana funkcja:

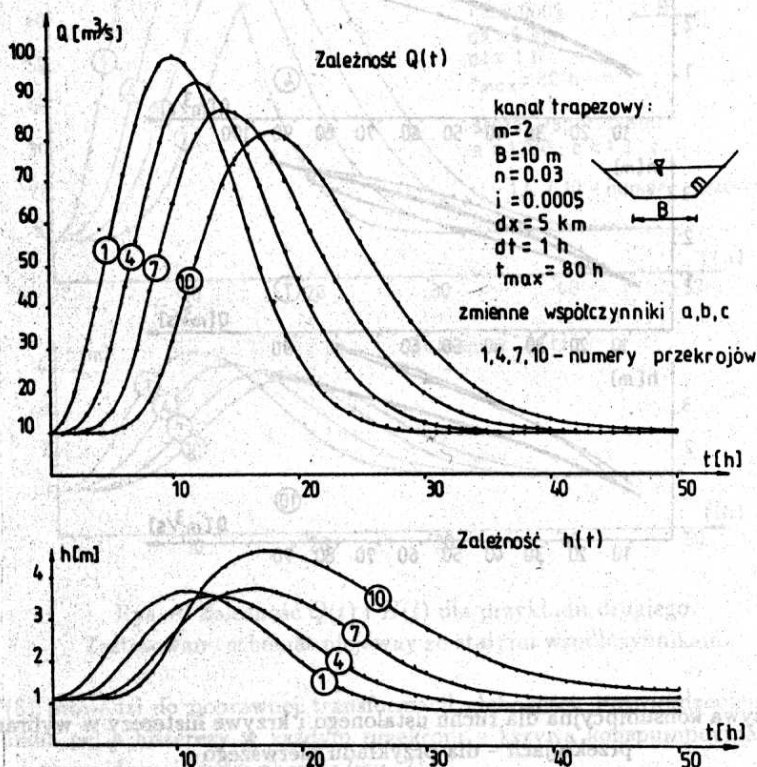
$$Q = Q_o + Q_m \left(\frac{t - t_o}{t_m - t_o} \right)^2 \exp \left[1 - \left(\frac{t - t_o}{t_m - t_o} \right)^2 \right], \quad (9)$$

gdzie:

$$Q_o = 10 \text{ m}^3/\text{s}; \quad T_o = 0,$$

$$Q_m = 90 \text{ m}^3/\text{s}; \quad t_m = 10 \text{ h}.$$

Symulacja przepływu fali powodziowej wykonana została za pomocą schematu niejawnego metody różnic skończonych, w oparciu o założenie odpływu swobodnego wody z kanału. W przykładzie pierwszym obliczenia wykonano zgodnie z równaniem (7), jedynie w ostatnim przekroju obliczeniowym posłużono się równaniem (8). Jak widać,

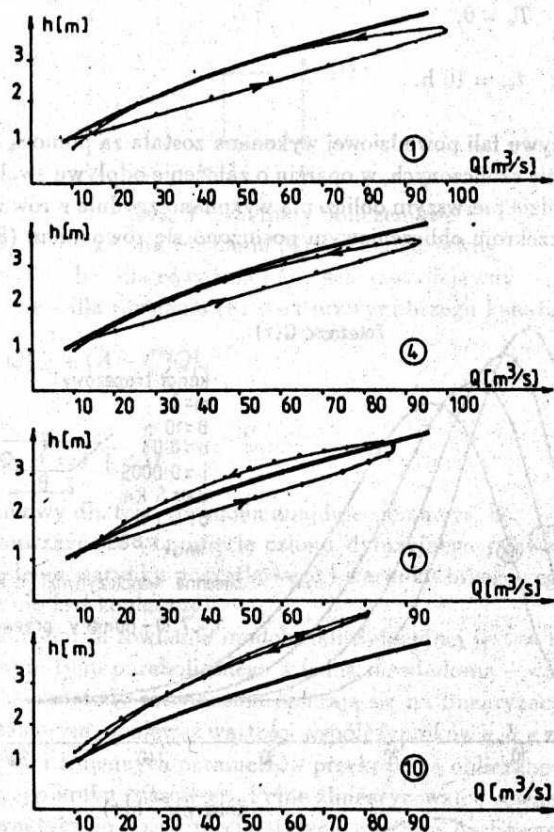


Rys. 4. Zależność $Q(t)$ i $H(t)$ dla przykładu pierwszego.

Zastosowano schemat niejawni ze zmiennymi współczynnikami

transformacja przepływów zadanej fali powodziowej jest poprawna, natomiast stany wody transformują się źle, ponieważ głębokości w ostatnim przekroju kanału są większe niż w przekroju początkowym - patrz rys. 4. Także zależność głębokości wody w

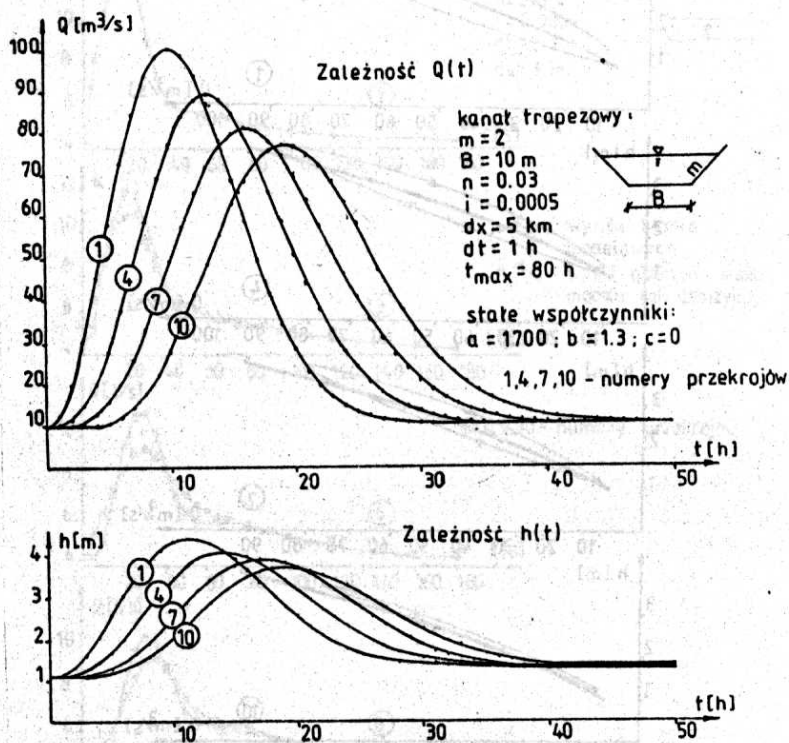
Krzywe histerezy



Rys. 5. Krzywa konsumpcyjna dla ruchu ustalonego i krzywe histerezy w wybranych przekrojach – dla przykładu pierwszego

kanale od wartości przepływu nie jest poprawna – krzywa konsumpcyjna dla ruchu ustalonego otrzymana z równania Manninga znajduje się poza pętlą histerezy – patrz rys. 5.

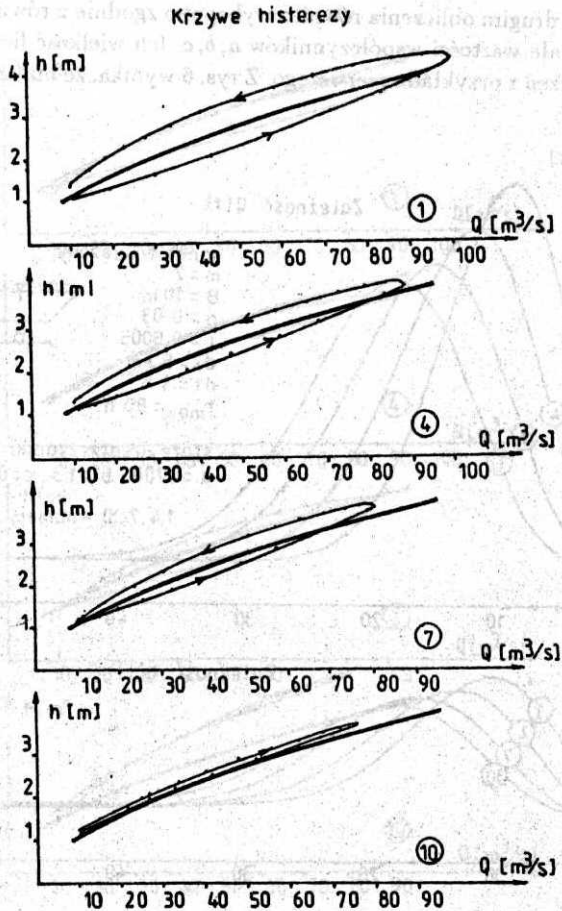
W przykładzie drugim obliczenia również wykonano zgodnie z równaniami (7) i (8), jednak przyjęto stałe wartości współczynników a, b, c . Ich wielkość liczbową określono na podstawie obliczeń z przykładu pierwszego. Z rys. 6 wynika, że linearyzacja równania



Rys. 6. Zależność $Q(t)$ i $H(t)$ dla przykładu drugiego.
 Zastosowano schemat niejawni ze stałymi współczynnikami

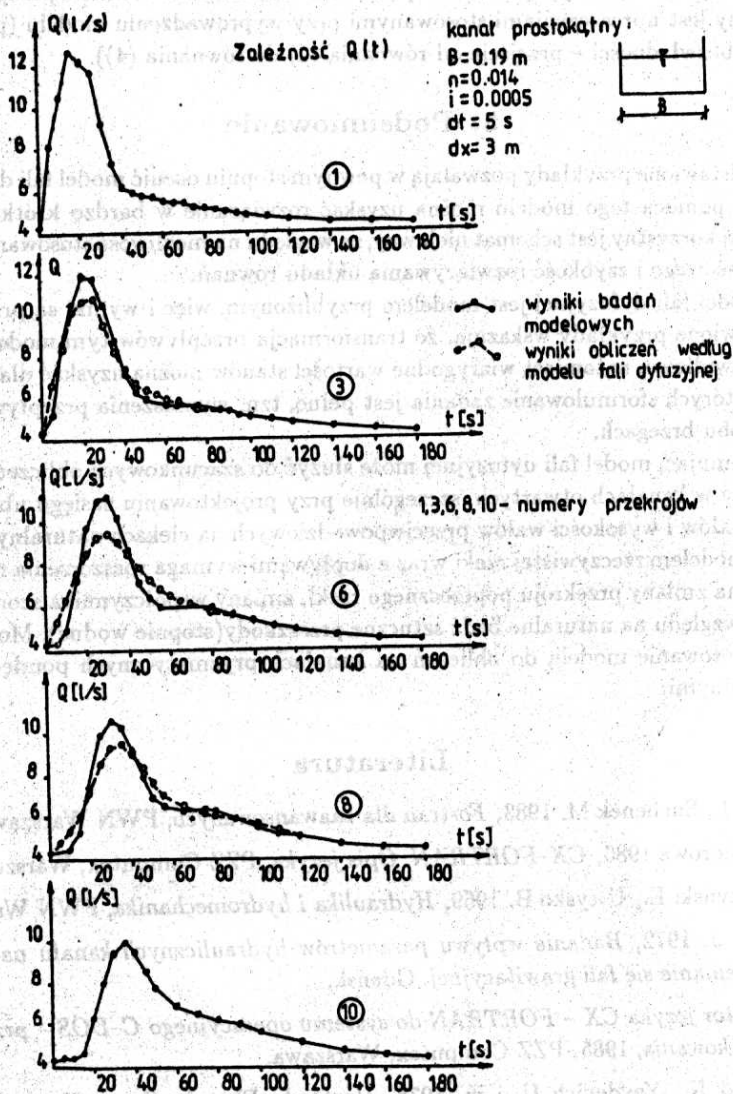
(7) i (8) prowadzi do poprawnej transformacji głębokości. Potwierdzeniem tego jest otrzymana pętla histerezy w każdym przekroju – krzywa konsumpcyjna dla ruchu ustalonego znajduje się w jej obrębie (rys. 7).

W przykładzie trzecim przeprowadzono weryfikację modelu fali dyfuzyjnej w oparciu o pracę doktorską J. Geringera pt: „Badanie wpływu parametrów hydraulicznych kanału na rozprzestrzenianie się fali grawitacyjnej”. W pracy tej dr J. Geringer zamieszcza szereg wyników badań modelowych dotyczących przejścia fali powodziowej w kanale prostym oraz wyników obliczeń wykonanych dla pełnego układu równań De Saint Venanta.



Rys. 7. Krzywa konsumpcyjna dla ruchu ustalonego i krzywe histerezy w wybranych przekrojach – dla przykładu drugiego

Obliczenia przepływów przeprowadzono we wszystkich przekrojach kanału zgodnie z równaniem (7), tzn. posłużono się schematem niejawnym przy znajomości warunku początkowego i obu warunków brzegowych. Wyniki obliczeń zamieszczono na rys. 8.



Rys. 8. Porównanie wyników badań modelowych z wynikami obliczeń wykonanymi wg schematu niejawnego - przykład trzeci

Kulminacja fali powodziowej obliczona na podstawie modelu fali dyfuzyjnej jest niższa niż w przypadku stosowania pełnego układu równań De Saint Venanta. Jakkolwiek objętości wody przepływającej przez poszczególne przekroje w obu przypadkach obliczeniowych są zbliżone, to widać, że krzywe przepływu uzyskane z modelu fali dyfuzyjnej są łagodniejsze i bardziej pełne. Brak opóźnienia w narastaniu wielkości przepływu spowodowany jest uproszczeniami stosowanymi przy wyprowadzeniu modelu (pominięcie członów bezwładności – przejście od równania (2) do równania (4)).

5. Podsumowanie

Przedstawione przykłady pozwalają w pewnym stopniu ocenić model fali dyfuzyjnej.

1. Za pomocą tego modelu można uzyskać rozwiązanie w bardzo krótkim czasie. Zwłaszcza korzystny jest schemat niejawny, ze względu na możliwość stosowania dużego kroku czasowego i szybkość rozwiązywania układu równań.

2. Model fali dyfuzyjnej jest modelem przybliżonym, więc i wyniki są przybliżone. Przedstawione przykłady wskazują, że transformacja przepływów tym modelem przebiega prawidłowo, natomiast wiarygodne wartości stanów można uzyskać dla przypadków, w których sformułowanie zadania jest pełne, tzn. wymuszenia przepływu występują na obu brzegach.

Reasumując, model fali dyfuzyjnej może służyć do szacunkowych obliczeń przepływów wody w kanałach otwartych, szczególnie przy projektowaniu zasięgu ubezpieczeń skarp kanałów i wysokości wałów przeciwpowodziowych na ciekach naturalnych. Objęcie tym modelem rzeczywistej rzeki wraz z dopływami wymaga rozszerzenia modelu ze względu na zmiany przekroju poprzecznego rzeki, zmiany współczynnika szorstkości, a także ze względu na naturalne bądź sztuczne przeszkody (stopnie wodne). Możliwe jest jednak stosowanie modelu do obliczeń na kanałach przyrządowych pomiędzy stopniami wodnymi.

Literatura

- Bielecki J., Suchenek M. 1983, *Fortran dla zaawansowanych*, PWN Warszawa.
- Praca zbiorowa 1985, *CX-FORTRAN. Opis języka*, PZZ Computex, Warszawa.
- Czetwertyński E., Utrysko B. 1969, *Hydraulika i hydromechanika*, PWN Warszawa.
- Geringer J. 1972, *Badanie wpływu parametrów hydraulicznych kanału na rozprzestrzenianie się fali grawitacyjnej*, Gdańsk.
- Kompilator języka CX - FORTRAN do systemu operacyjnego C-DOS - przewodnik użytkownika, 1985, PZZ Computex, Warszawa.
- Mahmood K., Yevdevich U. i in. 1975, *Unsteady Flow in Open Channels*, Water Resour. Pub., Ft. Collins, Colorado.

Summary

The application of diffusion wave model to flow symulation in fluvial system. An sample of model evaluation according to its opportunity for unsteady and slow-variable flow specification within complicated channel network.