

STANISŁAW TOKARZEWSKI, CZESŁAW M. RODKIEWICZ*

Optymalne konfiguracje rozgałęzień rurociągowych

1. Wstęp

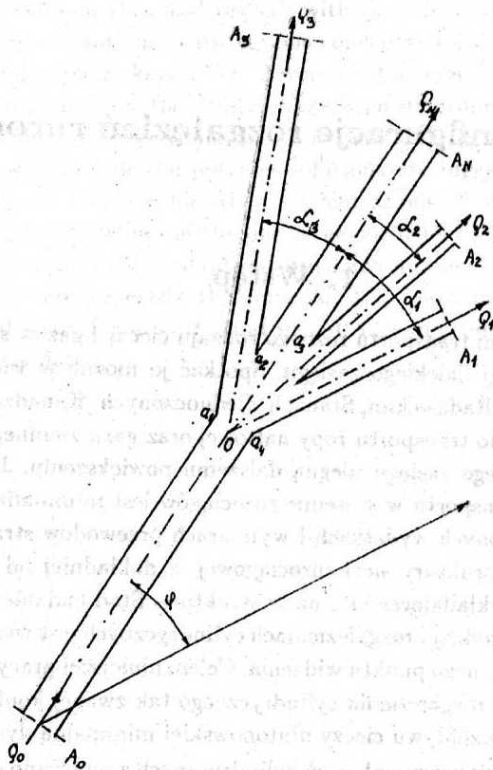
Najtańszym środkiem transportu różnego rodzaju cieczy i gazów służących głównie jako paliwa są rurociągi dalekiego zasięgu. Spotkać je można w wielu krajach, między innymi w Związku Radzieckim, Stanach Zjednoczonych, Kanadzie i innych. Służą one przede wszystkim do transportu ropy naftowej oraz gazu ziemnego. W przyszłości sieci rurociągów dalekiego zasięgu ulegną dalszemu powiększeniu. Jednym z podstawowych problemów transportu w systemie rurociągów jest minimalizacja strat energii przepływu. Przy założonych wydatkach i wymiarach przewodów straty energii zależą przede wszystkim od struktury sieci rurociągowej, a dokładniej od konfiguracji każdego rozgałęzienia rur składającego się na tę strukturę. Stąd badanie dysypacji energii powstającej w różnego rodzaju rozgałęzieniach cylindrycznych jest ważne zarówno z poznawczego jak i praktycznego punktu widzenia. Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie dla wielosegmentowego rozgałęzienia cylindrycznego tak zwanej konfiguracji optymalnej zapewniającej dla przepływu cieczy niutonowskiej minimalną dysypację energii.

Problematyką optymalizacji połączeń cylindrycznych zajmowano się między innymi w pracach podejmujących próbę wyjaśniania praw rządzących powstawaniem określonych struktur rozgałęzień naczyń krwionośnych funkcjonujących w organizmie człowieka (Murray 1926; Thomson 1942; Kamiya i Zogawa 1972; Zamir 1976, 1986). Wszystkie wymienione prace ograniczają rozważania do dwu i trójsegmentowych rozgałęzień, typowych dla układów krwionośnych. Niniejsza praca formułuje warunki optymalizacji dla połączeń cylindrycznych składających się z dowolnej ilości segmentów. Dodatkowo wskazuje ona na możliwość wykorzystania uzyskanych wyników przy prowadzeniu prac projektowych nad optymalnymi strukturami sieci rurociągów dalekiego zasięgu (Graczev i in. 1987; Petrozolin 1974; Stephenson 1976).

*Dr Stanisław TOKARZEWSKI, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, ul. Świętokrzyska 21 00-049 Warszawa, Czesław M. RODKIEWICZ, University of Alberta, Edmonton

2. Podstawowe założenia

Niech będzie dane rozgałęzienie cylindryczne (rys. 1) składające się z segmentów wyróżnionych numerami $0, 1, 2, \dots, N$. Segment zerowy posiadający największy promień nazywać będziemy segmentem głównym. Kąty rozgałęzienia cylindrycznego $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ zawsze będą odmierzane od kierunku segmentu głównego (rys. 1).



Rys. 1. Wielosegmentowe rozgałęzienia cylindryczne

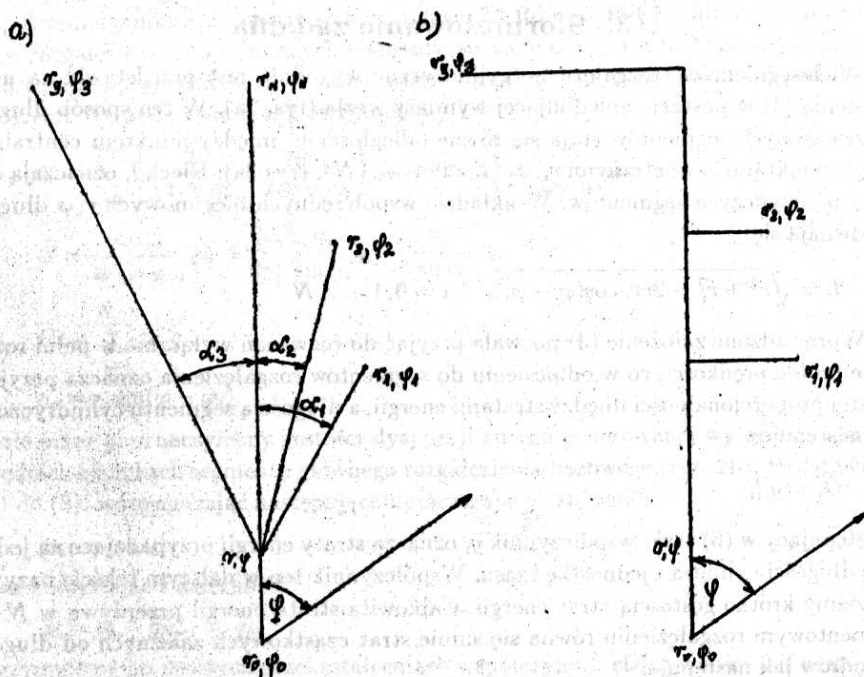
Kąt α_0 jest więc dany i równa się:

$$\alpha_0 = 180^\circ. \quad (1)$$

Kąty $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ określają jednoznacznie konfigurację $N + 1$ segmentowego połączenia cylindrycznego (rys. 1). Jeśli więc w dalszym tekście użyjemy słowa konfiguracja to będziemy mieć na myśli zbiór wartości kątów $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Dla wygody prowadzenia rozważań punkty zewnętrzne połączenia cylindrycznego r_i, φ_i (rys. 2a) ponumerujemy w taki sposób, aby spełniona była nierówność następująca:

$$r_i \cos(\varphi - \varphi_i) \geq r_{i-1} \cos(\varphi - \varphi_{i-1}). \quad (2)$$

Nierówność ta oznacza, że rzuty kolejnych segmentów bocznych na segment główny rosną w miarę wzrostu indeksu i . Niech segmenty boczne odchodzące od segmentu głównego przecinają go w taki sposób, że osie symetrii przecinają się w punkcie 0 (rys. 1). Wprowadźmy następujące podstawowe założenie:



Rys. 2. Schemat wielosegmentowego rozgałęzienia cylindrycznego:
a) rozgałęzienie optymalne, b) nieoptymalne rozgałęzienie bazowe

$$\frac{0a_i}{0A_i} < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

oznaczające, że rozmiary charakterystyczne węzła określone odległościami $0a_i$ są znacznie mniejsze od długości cylindrów $0A_i$ tworzących rozgałęzienie. Załóżmy, że przez przekrój A_0 wpływa do rozgałęzienia ciecz niutonowska z wydatkiem Q_0 oraz wypływa w przekrojach A_1, A_2, \dots, A_N z wydatkami Q_1, Q_2, \dots, Q_N . Po drodze przepływa oczywiście przez węzeł a_1, a_2, a_3, a_4 (rys. 1). Straty energii E_w występujące w węźle są na mocy założenia (3) niewielkie w porównaniu ze stratami na długościach segmentów E_s , co oznacza, że spełniona jest następująca nierówność:

$$\frac{E_w}{E_s} < 1 \quad (4)$$

Niech przekroje A_0, A_1, \dots, A_N będą ustalone. Niech punkt przecięcia osi cylindrów 0 zajmuje dowolne położenie (rys. 1). W takiej sytuacji globalne straty energii zależą będą wyłącznie od położenia punktu centralnego 0. Należy się spodziewać, że istnieje takie położenie punktu 0, dla którego straty energii osiągną minimum. Takie położenie punktu 0 nazywać będziemy optymalnym, a wynikające z niego wartości kątów rozgałęzienia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ określimy także jako optymalne.

3. Sformułowanie zadania

Wielosegmentowe rozgałęzienie cylindryczne wygodnie jest przedstawić na mocy założenia (3) w postaci zaniedbującej wymiary węzła (rys. 2a). W ten sposób długości poszczególnych segmentów stają się równe odległościom między punktem centralnym r, φ , a punktami zewnętrznymi r_i, φ_i ($i = 0, 1, \dots, N$), (rys. 2a). Niech l_i oznaczają długości pojedynczych segmentów. W układzie współrzędnych biegunowych r, φ długości te równają się

$$l_i = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\varphi - \varphi_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (5)$$

Wprowadzone założenie (3) pozwala przyjąć do rozważań wyłącznie w pełni rozwinięte profile prędkości, co w odniesieniu do segmentów rozgałęzienia oznacza przyjęcie prostej proporcjonalności między stratami energii, a długością segmentu cylindrycznego jak następuje:

$$G_i = g_i l_i \quad (6)$$

Występujący w (6) stały współczynnik g_i oznacza straty energii przypadające na jednostkę długości cylindra i jednostkę czasu. Współczynnik ten w dalszym tekście nazywać będziemy krótko gęstością strat energii. Całkowita strata energii przepływu w $N + 1$ segmentowym rozgałęzieniu równa się sumie strat cząstkowych zależnych od długości cylindrów jak następuje:

$$G(r, \varphi) = \sum_{i=0}^N G_i[l_i(r, \varphi)] \quad (7)$$

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie dla rozgałęzienia o skończonej ilości $N + 1$ segmentów warunków koniecznych i dostatecznych istnienia lokalnego minimum dla funkcji dysypacji energii (7). Dokładniej precyzując, dla ustalonych punktów zewnętrznych r_i, φ_i (rys. 1a) poszukiwać będziemy takiej konfiguracji rozgałęzienia cylindrycznego $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ (rys. 2a), przy której podczas przepływu cieczy niutonowskiej wystąpi minimalna dysypacja energii. Konfigurację gwarantującą rozgałęzieniu cylindrycznemu minimalne straty przepływowe nazywać będziemy konfiguracją optymalną.

4. Efektywność konfiguracji optymalnej

W celu określenia wielkości różnic dysypacji energii w konfiguracjach optymalnych i konfiguracjach nieoptymalnych wprowadzimy do rozważań następujący współczynnik efektywności konfiguracji optymalnej:

$$\xi = \frac{\tilde{G} - G}{\tilde{G}_b} \quad (8)$$

gdzie \tilde{G} , G , \tilde{G}_b oznaczają straty energii powstające w rozgałęzieniu nieoptymalnym przyjętym za bazowe (rys. 2b); w wyjściowym rozgałęzieniu optymalnym (rys. 2a) w cylindrach bocznych nieoptymalnego rozgałęzienia bazowego (rys. 2b). Należy zauważyć, że nieoptymalne rozgałęzienie bazowe oraz rozgałęzienie optymalne posiadają jednakowe współrzędne punktów zewnętrznych r_i, φ_i (rys. 2). Różnica między nimi polega na tym, że w rozgałęzieniach optymalnych segmenty boczne podchodzą do segmentu głównego pod kątami optymalnymi $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, zaś w rozgałęzieniu nieoptymalnym pod kątami prostymi. Na podstawie rys. 2 otrzymujemy

$$\tilde{G} = \sum_{i=2}^{N-1} \left\{ \left(\frac{n_i}{\tan \alpha_i} - \frac{n_{i-1}}{\tan \alpha_{i-1}} \right) \tilde{g}_{i-1} + n_i g_i \right\} + \frac{n_1}{\tan \alpha_1} \tilde{g}_0,$$

$$G = \frac{n_{N-1}}{\tan \alpha_{N-1}} g_N + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{n_i}{\sin \alpha_i} g_i + \frac{n_1}{\tan \alpha_1} g_0, \quad (9)$$

$$\tilde{G}_b = \sum_{i=1}^{N-1} n_i g_i,$$

$$n_i = r_i \sin(\varphi - \varphi_i),$$

gdzie przez \tilde{g}_i oznaczyliśmy gęstości dysypacji energii generowanej wyłącznie w odpowiednich odcinkach segmentu głównego rozgałęzienia bazowego (rys. 2b). Podstawiając (9) do (8), wprowadzając następujące upraszczające założenie:

$$|n_i| = |n_{i-1}| \quad (10)$$

oraz korzystając z zależności

$$\tilde{g}_0 = g_0, \quad \tilde{g}_{N-1} = g_N$$

otrzymujemy po prostych przekształceniach współczynnik efektywności jak następuje

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{|\tan \alpha_i|} (\tilde{g}_{i-1} - \tilde{g}_i) + \left(1 - \frac{1}{|\sin \alpha_1|}\right)}{\sum_{i=1}^{N-1} g_i} \quad (11)$$

Różnica między energią traconą w rozgałęzieniach o konfiguracjach wzorcowej nieoptymalnej (rys. 2b) i wyjściowej optymalnej (rys. 2a) podzielona przez energię dysypowaną w cylindrach bocznych rozgałęzienia nieoptymalnego (rys. 2b) jest definicją współczynnika efektywności (11) otrzymanego przy upraszczającym założeniu (10). Formuła (11) nie zależy od długości segmentów, a jedynie kątów optymalnych rozgałęzienia i gęstości dysypacji energii w segmentach. W różnego rodzaju sieciach rurociagowych przewody boczne odchodzą niejednokrotnie pod kątem prostym od przewodu głównego. Jest to przykład praktyczny bazowej konfiguracji nieoptymalnej. Interpretacja fizyczna współczynnika efektywności konfiguracji optymalnej jest prosta. Jeśli wartość ξ pomnożymy przez wielkość energii dysypowanej w cylindrach bocznych odchodzących pod kątem prostym od cylindra głównego to w wyniku otrzymamy ilość energii traconej wyłącznie z powodu nieoptymalnej konfiguracji.

5. Równania konfiguracji optymalnej

Podstawiając do związku (7) zależności (6) otrzymujemy:

$$G(r, \varphi) = \sum_{i=0}^N g_i l_i \quad (12)$$

Różniczkowanie (12) względem r i φ prowadzi do związków

$$\frac{\partial G(r, \varphi)}{\partial r} = \sum_{i=0}^N g_i \frac{\partial l_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial G(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{i=0}^N g_i \frac{\partial l_i}{\partial \varphi} \quad (13)$$

Korzystając z zależności (5), a także na podstawie rysunku 2 dostajemy

$$\frac{\partial l_i}{\partial r} = -\frac{r_i \cos(\varphi - \varphi_i) - r}{l_i} = -\cos \alpha_i, \quad (14)$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial \varphi} = \frac{r r_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{l_i} = r \sin \alpha_i \quad (15)$$

Po podstawieniu (14) i (15) do (13), a następnie przyrównaniu lewych stron do zera otrzymujemy następujące związki:

$$\sum_{i=0}^N g_i \cos \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^N g_i \sin \alpha_i = 0 \quad (16)$$

stanowiące warunki konieczne istnienia minimum dla funkcji strat energii (12) obowiązujące w warunkach, gdy punkt centralny r, φ (rys. 2a) porusza się swobodnie. Dodatkowo należy zauważyć, że związki

$$\sum_{i=0}^N g_i \cos \alpha_i = 0, \quad \varphi = \text{const} \quad (17)$$

oraz

$$\sum_{i=0}^N g_i \sin \alpha_i = 0, \quad r = \text{const} \quad (18)$$

również określają warunki konieczne istnienia minimum dla funkcji celu (12) obowiązujące jednak w przypadkach poruszania się punktu centralnego (rys. 2a) wzdłuż kierunku segmentu głównego (17), wzdłuż kierunku prostopadłego do segmentu głównego (18). W ogólnym przypadku równania (16), (17), (18) nie są zamknięte. Aby je zamknąć należy dołączyć do nich wynikające z rys. 2 następujące więzy geometryczne:

$$r_i \cos(\varphi - \varphi_i) - \frac{r_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{\tan \alpha_i} = r, \quad i = 1, \dots, N \quad (19)$$

Równania (16), (17), (18) wraz z równaniami (19) stanowią układ $N + 2$ równań z $N + 2$ niewiadomymi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, r, \varphi$. Określają one dla rozgałęzienia cylindrycznego w sposób jednoznaczny optymalne kąty α_i , a także optymalne współrzędne r, φ . Należy przypomnieć, że kąt α_0 równa się

$$\alpha_0 = 180^\circ \quad (20)$$

i jest konsekwencją wprowadzonego sposobu opisu konfiguracji rozgałęzienia cylindrycznego (patrz (1)).

6. Warunki dodatkowe istnienia minimum funkcji strat

Warunki dostateczne istnienia minimum funkcji strat energii (12) określają następujące nierówności

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 > 0. \quad (21)$$

Podstawiając do (21) zależność (6) dostajemy

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = \sum_{i=0}^N g_i \frac{\partial^2 l_i}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = \sum_{i=0}^N g_i \frac{\partial^2 l_i}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \varphi} = \sum_{i=0}^N g_i \frac{\partial^2 l_i}{\partial r \partial \varphi}. \quad (22)$$

Proste, ale pracochłonne obliczenia prowadzą do następujących zależności

$$\frac{\partial^2 l_i}{\partial r^2} = \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i}, \quad \frac{\partial^2 l_i}{\partial \varphi^2} = r \cos \alpha_i + \frac{r^2}{l_i} \cos^2 \alpha_i \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 l_i}{\partial r \partial \varphi} = \frac{r}{l_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i + \sin \alpha_i$$

Podstawiając (23) do (22), a następnie do (21) oraz wykorzystując związki (16) dostajemy ostatecznie

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = \sum_{i=0}^N g_i \frac{\sin^2 \alpha_i}{l_i} > 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{g_i}{l_i} \frac{g_j}{l_j} \sin^2(\alpha_i - \alpha_j) > 0. \quad (25)$$

Gęstości dysypacji energii g_i oraz długości segmentów l_i są dodatnie. Na tej podstawie formuły (24) i (25) przyjmują dla dowolnych kątów α_i wartości dodatnie. A zatem warunki dostateczne istnienia minimum (24 - 25) dla funkcji strat energii (12) spełnione są tożsamościowo. W ten sposób zostało dowiedzione, że dysypacja energii jest minimalna, gdy ciecz niutonowska przepływa przez rozgałęzienie cylindryczne o konfiguracji spełniającej równania (16) - bezwzględne minimum, równania (17) - minimum wzdłuż kierunku segmentu głównego, równania (18) - minimum wzdłuż kierunku prostopadłego do segmentu głównego.

7. Przepływy cieczy niutonowskich

Dla w pełni rozwiniętych przepływów w cylindrach gradient ciśnienia $\Delta p/l$ zależy od wydatku cieczy następująco:

dla przepływu laminarnego (Schlichting 1955)

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4}, \quad (26)$$

dla przepływu turbulentnego (Schlichting 1975)

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{0,791 \cdot \rho}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \frac{Q^{2,25}}{R^{5,25}}, \quad (27)$$

gdzie η , v , R oznaczają odpowiednio współczynnik lepkości, lepkość kinematyczną oraz promień cylindra. Stąd gęstość strat energii odniesione do jednostki długości cylindra i jednostki czasu równają się:

dla przepływu laminarnego

$$\bar{g} = \frac{\Delta p}{l} Q = \frac{8\eta Q^2}{\pi R^4}, \quad (28)$$

dla przepływu turbulentnego

$$g = \frac{\Delta p}{l} Q = \frac{0,791 \cdot \rho}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \frac{Q^{3,25}}{R^{5,25}}. \quad (29)$$

Podstawiając (28) i (29) do (16), (17), (18) otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^N \frac{Q_i^s}{R_i^{s+2}} \cos \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^N \frac{Q_i^s}{R_i^{s+2}} \sin \alpha_i = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{Q_i^s}{R_i^{s+2}} \cos \alpha_i = 0, \quad \varphi = \text{const}, \quad (31)$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{Q_i^s}{R_i^{s+2}} \sin \alpha_i = 0, \quad r = \text{const}, \quad (32)$$

przy czym

$s = 2$ dla przepływu laminarnego

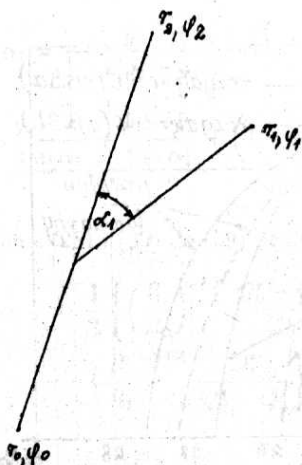
$s = 3.25$ dla przepływu turbulentnego.

Zależności (30 – 32) określają warunki, jakie konfiguracja rozgałęzienia cylindrycznego musi spełniać, aby być konfiguracją optymalną dla laminarnego, bądź turbulentnego przepływu cieczy niutonowskiej. Warunki (30), (31), (32) dotyczą kolejno minimum bezwzględnego, minimum wzdłuż kierunku segmentu głównego, minimum wzdłuż kierunku prostopadłego do kierunku segmentu głównego. Należy zwrócić uwagę, że warunki (30 – 32) nie zależą od długości segmentów tworzących rozgałęzienie, a jedynie od wydatków i promieni cylindrów.

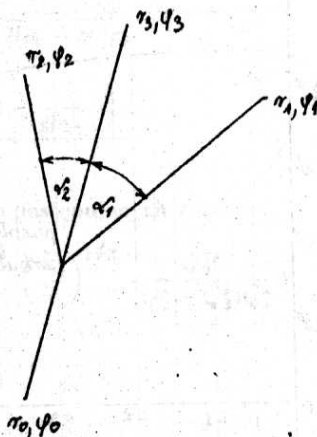
8. Przykłady optymalnych konfiguracji dla przepływów cieczy niutonowskiej

Podamy przykłady wyznaczania optymalnych konfiguracji rozgałęzień cylindrycznych za pomocą związków (16), (17), (18) i zależności (28) lub (29). Podamy również formuły na efektywność konfiguracji optymalnych. W pierwszej kolejności rozważymy trójsegmentowe połączenie cylindryczne z zadanym kątem $\alpha_2 = 0$ (rys. 3a). W tym przypadku mamy do czynienia z wyznaczaniem minimum dysypacji energii wzdłuż kierunku segmentu głównego. Poszukiwać będziemy wartości optymalnej dla kąta α_1 . Dla $N = 2$ i $\alpha_2 = 0$ wzór (17) przyjmuje w oparciu o (20) następującą postać

a)



b)



Rys. 3. Płaskie rozgałęzienie cylindryczne: a) trójsegmentowe, b) czterosegmentowe

$$g_0 - g_2 - g_1 \cos \alpha_1 = 0. \quad (33)$$

Stąd oraz z (11) mamy

$$\cos \alpha_1 = \frac{g_0 - g_2}{g_1}, \quad (34)$$

$$\xi = \frac{\tilde{g}_0 - \tilde{g}_1}{g_1 \tan \alpha_1} + \left(1 - \frac{1}{\sin \alpha_1}\right) \quad (35)$$

Podstawiając (28) i (29) do (34) i (35) dostajemy wzory następujące:

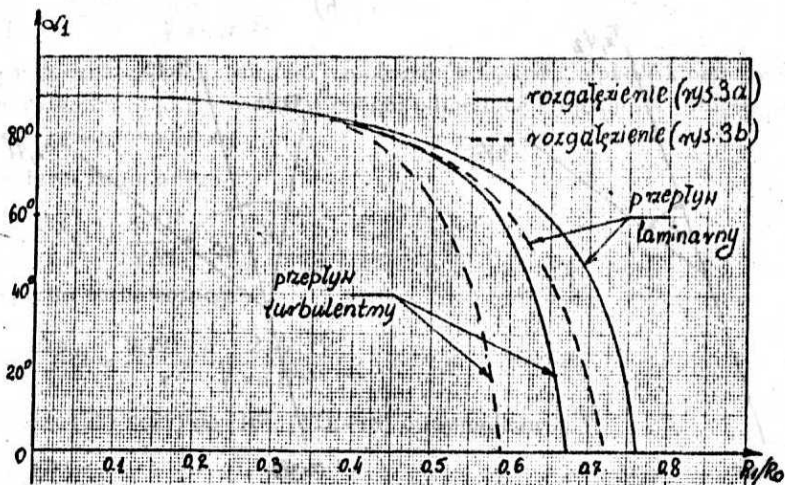
$$\cos \alpha_1 \left[\left(\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \right)^s - \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^s \right] \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{s+2}, \quad (36)$$

$$\xi = 1 - \sin \alpha_1, \quad (37)$$

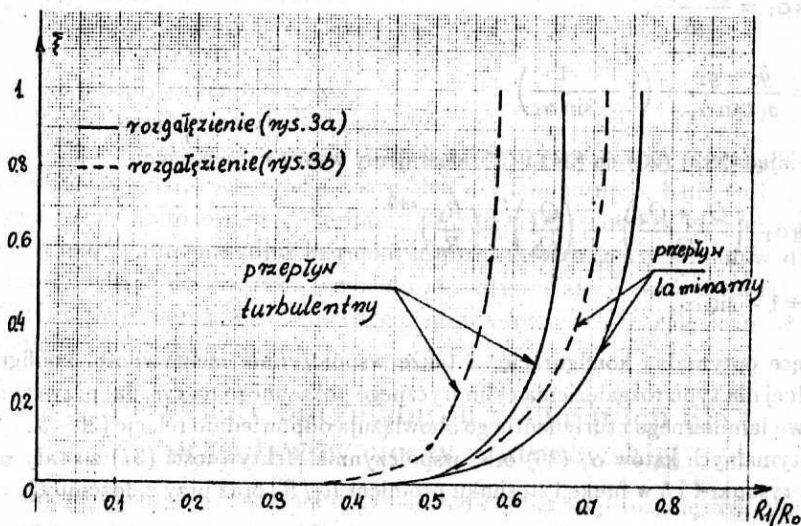
określające optymalną konfigurację, a także współczynnik efektywności konfiguracji optymalnej dla typu rozgałęzienia cylindrycznego pokazanego na rys. 3a, przy czym dla przepływu laminarnego i turbulentnego obowiązują odpowiednio relacje (30 - 32). Wartości optymalnych kątów α_1 (36) oraz współczynnik efektywności (37) zostały naniezione na rysunki 4 i 5 w funkcji stosunku promieni R_1/R_0 oraz przy założeniu $Q_1 = Q_2$.

W dalszej kolejności rozważymy czterosegmentowe cylindryczne połączenie o zadanym kącie rozgałęzienia $\alpha_3 = 0$ (rys. 3b). Poszukiwać będziemy wartości optymalnych dla kątów α_1 i α_2 (rys. 3b). Do tego celu zastosujemy kryterium bezwzględnego minimum (16). Dla $N = 3$ i $\alpha_3 = 0$ otrzymujemy

$$g_0 - g_1 \cos \alpha_1 - g_2 \cos \alpha_2 - g_3 = 0, \quad g_1 \sin \alpha_1 + g_2 \sin \alpha_2 = 0. \quad (38)$$



Rys. 4. Optymalne kąty dla trójsegmentowego rozgałżenia (—), dla czterosegmentowego rozgałżenia symetrycznego (---)



Rys. 5. Współczynnik efektywności konfiguracji optymalnej dla trójsegmentowego (—), dla czterosegmentowego rozgałżenia symetrycznego (---)

Stąd oraz z (11) dostajemy po żmudnych przekształceniach

$$\cos \alpha_1 = \frac{(g_0 - g_3)^2 + g_1^2 - g_2^2}{2(g_0 - g_3)g_1}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{(g_0 - g_3)^2 + g_2^2 - g_1^2}{2(g_0 - g_3)g_2}, \quad (39)$$

$$\xi = \frac{\frac{\tilde{g}_0 - \tilde{g}_1}{\tan \alpha_1} + \frac{\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2}{\tan \alpha_2} + \left(1 - \frac{1}{\sin \alpha_1}\right)g_1 + \left(1 - \frac{1}{\sin \alpha_1}\right)g_2}{g_1 + g_2} \quad (40)$$

Podstawienie (28) i (29) do (39) i (40) prowadzi do następujących wzorów

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{s+2} \frac{Q_0^s - Q_3^s}{Q_1^s} - \left(\frac{R_0}{R_2}\right)^{s+2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{s+2} \frac{Q_2^{2s}}{(Q_0^s - Q_3^s)Q_1^s} + \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{s+2} \frac{Q_1^s}{Q_0^s - Q_3^s} \right\}, \quad (41)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{R_2}{R_0}\right)^{s+2} \frac{Q_0^s - Q_3^s}{Q_2^s} - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{s+2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{s+2} \frac{Q_1^{2s}}{(Q_0^s - Q_3^s)Q_2^s} + \left(\frac{R_0}{R_2}\right)^{s+2} \frac{Q_2^s}{Q_0^s - Q_3^s} \right\}, \quad (42)$$

$$\xi = \frac{\frac{1}{R_0^{s+2}} \frac{Q_0^s - (Q_0 - Q_1)^s}{\tan \alpha_1} + \frac{(Q_0 - Q_1)^s - (Q_0 - Q_1 - Q_2)^s}{\tan \alpha_2}}{\frac{Q_1^s}{R_1^{s+2}} + \frac{Q_2^s}{R_2^{s+2}}} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\sin \alpha_1}\right) \frac{Q_1^s}{R_1^{s+2}} + \left(1 - \frac{1}{\sin \alpha_2}\right) \frac{Q_2^s}{R_2^{s+2}}}{\frac{Q_1^s}{R_1^{s+2}} + \frac{Q_2^s}{R_2^{s+2}}} \quad (43)$$

określających konfigurację optymalną oraz współczynnik efektywności konfiguracji optymalnej dla typu rozgałęzienia pokazanego na rys. 3b, przy czym odpowiednio dla przepływu laminarnego i turbulentnego obowiązują relacje (30 - 32). Wartości optymalnych kątów (41 - 42) oraz współczynnik efektywności (44) zostały naniesione na rysunki 4 i 5 w funkcji stosunku promieni R_1/R_0 przy założeniu $Q_1 = Q_2 = Q_3$, $R_2 = R_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$.

9. Dyskusja otrzymanych wyników

Przy podstawowym założeniu, że wymiary węzła są znacznie mniejsze od długości cylindrów tworzących płaskie rozgałęzienie cylindryczne wyznaczono warunki konieczne i dostateczne istnienia lokalnego minimum dla strat energii powstających w przepływie cieczy niutonowskiej przez wielosegmentowe rozgałęzienia. Następnie w kolejności

wykazano, że warunki dostateczne, konieczne przyjmują dla przepływów cieczy niutonowskich wartości dodatnie i wystarczają do osiągnięcia przez funkcję strat energii lokalnego minimum. Na tej podstawie otrzymano ostatecznie konkretne formuły (patrz (30 - 32)) osiągania przez rozgałęzienia cylindryczne tak zwanych konfiguracji optymalnych obowiązujące zarówno dla laminarnych jak i turbulentnych przepływów cieczy niutonowskiej. Warunki (30 - 32) nie zależą od długości segmentów, a jedynie od wydatków w przewodach i promieni cylindrów tworzących rozgałęzienie. Najważniejsze wnioski wynikające z niniejszej pracy dają się sformułować następująco:

- 1) jeśli w dowolnym, wielosegmentowym rozgałęzieniu cylindrycznym wydatki Q_i , promienie R_i oraz kąty α_i spełniają zależności (30), (31), lub (32) to rozgałęzienie posiada konfigurację optymalną, przy której straty energii przepływu osiągają bezwzględne minimum (30), minimum wzdłuż kierunku segmentu głównego (31), minimum wzdłuż kierunku prostopadłego do kierunku segmentu głównego (26);
- 2) jeśli natomiast wydatki Q_i , promienie R_i oraz kąty α_i nie spełniają żadnego ze związków (30 - 32) to wielosegmentowe rozgałęzienie cylindryczne posiada konfigurację nieoptymalną, dla której straty energii przepływu są zawsze większe od możliwych do uzyskania strat minimalnych. Wykonane przykłady obliczeń numerycznych współczynnika efektywności konfiguracji optymalnej wskazują (rys. 5), że różnica między energią dysypowaną w konfiguracjach nieoptymalnych (rys. 2b) i konfiguracjach optymalnych może dochodzić przy bardzo niesprzyjających warunkach nawet do 100% energii dysypowanej w cylindrach bocznych bazowej konfiguracji nieoptymalnej (rys. 2b). Stąd wynika, że odpowiednie wykorzystanie formuł (30 - 32) przy prowadzeniu prac projektowych różnego rodzaju sieci rurociągów może spowodować znaczne oszczędności energii zużywanej do transportu materiałów ciekłych. Należy dodać, że rozszerzenie rozważań niniejszej pracy na przypadek cieczy nieniutonowskich jest stosunkowo proste i nie nastęrcza żadnych istotnych trudności.

Literatura

- Gabryszewski T. 1983, *Wodociągi*, Arkady, W-wa.
- Graczev W.W., Szczerbakow S.G., Jakowlew E. I. 1987, *Dinamika truboprowodnych system*, Nauka, Moskwa.
- Kamiya A., Togawa T. 1972, *Optimal branching structure of vascular tree*, Bull. math. Biophys. 34.
- Kirsanow M.V. 1949, *Ekonomiczeskij raschot wodoprowodnych setej*, Moskwa.
- Murray C.D. 1926, *The physiological principle of minimum work*, Proc. natn. Acad. Sci. U.S.A., 12.
- Petrozolin W. 1974, *Projektowanie sieci wodociągowych*, Arkady, W-wa.
- Rodkiewicz C.M., Howell D.H. 1971, *Fluid dynamics in large arterial bifurcation*, A.I.A.A.J., 9.
- Stephenson D. 1976, *Pipeline design for water engineers*, Elsew. P. Comp. Amsterdam.

- Thompson Sir D'arcy W. 1942, *On growth and form*, Cambridge, Camb. Univ. Press.
- Zamir M. 1976, *Optimality principles in arterial branching*, J. Gen. Physiol. 67.
- Zamir M. 1986, *Cost analysis of arterial branching*, J.Theor. biol. 62, 120.

Summary

Under basic assumption, that characteristic dimension of the junction place is much less then the length of pipes forming pipe bifurcation, the necessary and sufficient conditions for energy losses to be minimum has been obtained in the case of laminar and turbulent fluid flow through flat, multicylindrical bifurcation. It appeared, that the obtained sufficient conditions take only positive values, what practically means, that the necessary conditions are enough for reaching minimum by energy losses function. Basing on that, for multicylindrical bifurcations the formulas determining the optimum configurations were obtained, for which the energy losses function reaches unconditional minimum, minimum along direction of the main cylinder, minimum along direction perpendicular to the main cylinder. Hence the energy necessary for newtonian fluid pipeline satisfies definite conditions obtained in the paper by optimization process. If those conditions are not satisfied some extra, unnecessary energy losses occur in networks of pipelines. So the theoretical results obtained in the paper may be used for economical design of pipeline networks transporting newtonian fluids.