

B. DOBROWOLSKI, J. POSPOLITA*

Numeryczna analiza przepływu płynu potężowego przez kryzę

1. Wstęp

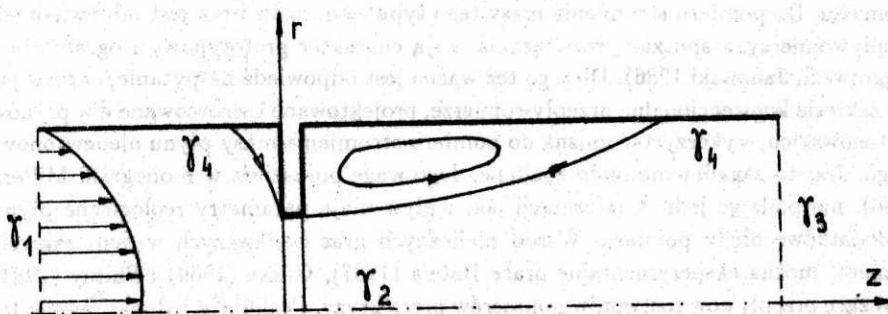
Jednym z istotnych problemów metrologii przepływów jest pomiar strumienia masy płynów o odmiennych od newtonowskich własnościach reologicznych. Płyny te, do których można zaliczyć m.in. roztwory i stopy polimerów o dużej masie cząsteczkowej, zawiesiny ciał stałych w cieczach i emulsje odgrywają coraz większą rolę w wielu gałęziach przemysłu. Do pomiaru strumienia masy tego typu czynników brak jest odpowiednich przepływomierzy, a spotkane rozwiązania mają charakter prototypowy i ograniczony (Wągrowski, Janowski 1986). Dlatego też ważna jest odpowiedź na pytanie, czy i w jakim zakresie konwencjonalne przepływomierze, projektowane i wzorcowane dla płynów newtonowskich, wykorzystać można do pomiaru strumienia masy płynu nienewtonowskiego. Jest to zagadnienie mało zbadane. Jego wagę poruszono w monografii Millera (1986), nie podając jednak informacji jaki wpływ mają parametry reologiczne płynu na dodatkowe błędy pomiaru. Wśród nielicznych prac badawczych w tym zakresie wymienić można eksperymentalne prace Bate'a (1967), Gilesa (1969) i Shimy (1984) dotyczące przepływów roztworów polimerów przez kryzy. Cechuje je jednak fragmentaryczność oraz zasadnicze różnice w wynikach. Badania Hasegawy (1984) oraz Chhabry i Richardsona (1985) dotyczące przepływu polimerów przez otwory o małej średnicy, mimo że obejmowały stosunkowo szeroki zakres zmian parametrów reologicznych płynu, nie są przydatne z punktu widzenia metrologii. Stosunkowo niewielka ilość i fragmentaryczność wyników badań dotyczących pomiarów przepływów płynów nienewtonowskich wskazuje na celowość ich teoretycznego ukierunkowania. Osiągnąć to można na drodze opisu przepływu płynu nienewtonowskiego przez zwężkę przy użyciu podstawowych równań ruchu ośrodków ciągłych. Model taki oprócz równań ruchu i równania ciągłości zawierać musi, właściwe dla danego ośrodka, równania reologiczne. Różnorodność spotykanych w praktyce cieczy nienewtonowskich o częstokroć odmiennych właściwościach jest przyczyną, że do ich opisu opracowano szereg różnych modeli reologicznych

*B. DOBROWOLSKI, J. POSPOLITA, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, 45-233 Opole, ul. Zrzeszenie Studentów Polskich 5

(Zachorski 1978). Modele te, jak przykładowo model cieczy lepkosprężystej Oldroyda, Roscoe czy Tannera wyrażają związki między wielkościami reologicznymi a kinematycznymi lub dynamicznymi, za pomocą skomplikowanych równań różniczkowych bądź całkowych. Równania konstytutywne zawierają na ogół szereg stałych, wyznaczenie których wymaga złożonych pomiarów reometrycznych. Badania wykazały, że dla wielu spotykanych cieczy nienewtonowskich związek między tensorem naprężeń i tensorem prędkości deformacji wyrazić można za pomocą potęgowej zależności Ostwalda - De Waele (Wilkinson 1963). Model potęgowy zawiera dwie stałe, które łatwo można wyznaczyć za pomocą powszechnie stosowanych reometrów. W pracy przedstawiono model matematyczny laminarnego przepływu płynu potęgowego przez rurociąg z kryzą. Numeryczne rozwiązanie równań modelu i analiza wyznaczonych tą drogą pól prędkości i ciśnienia daje możliwość poznania fizyki zjawiska przepływu płynu nienewtonowskiego przez kryzę. Wyniki obliczeń są podstawą do wstępnej oceny własności metrologicznych przepływomierzy zwężkowych przy zmianie parametrów reologicznych przepływającego medium.

2. Dwuwymiarowy model matematyczny przepływu

Rozpatruje się przepływ płynu lepkiego nieściśliwego przez rurociąg z zainstalowaną kryzą (rys. 1). Opis matematyczny przepływu składa się z równań ruchu dla



Rys. 1. Schemat układu przepływowego z kryzą

składowych: osiowej U i promieniowej V wektora prędkości

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) \quad (2)$$

oraz równania ciągłości

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

W równaniach tych τ_{ik} jest składową tensora naprężeń, ρ gęstością, p ciśnieniem. Powyższy model otrzymuje się przy założeniu osiowej symetrii przepływu, braku sił zewnętrznych oraz nieściśliwości płynu.

Zakłada się, że przepływającym czynnikiem jest ciecz nienewtonowska opisana prawem potęgowym (model Ostwalda - De Waele) (Astarita, Marucci 1974; Wilkinson 1963), dla której związek pomiędzy składowymi wiskotycznego tensora naprężeń τ_{ij} i tensora prędkości deformacji d_{ij} ma postać (Astarita, Marrucci 1974)

$$\tau_{ij} = k \left| \frac{1}{2} d_{km} d_{km} \right|^{(n-1)/2} d_{ij}, \quad (4)$$

gdzie k jest współczynnikiem konsystencji. W cylindrycznym układzie współrzędnych niezerowe składowe tensora naprężeń wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -2k\varphi \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \tau_{\theta\theta} &= -2k\varphi \frac{V}{r}, \\ \tau_{zz} &= -2k\varphi \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \tau_{rz} &= -k\varphi \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Funkcję φ zwaną funkcją „pozornej lepkości” wyraża zależność

$$\varphi = \left\{ 2 \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2}. \quad (6)$$

Dla płynu newtonowskiego ($n = 1$), z równania (6) wynika, $\varphi = 1$. Współczynnik k odpowiada wtedy współczynnikowi lepkości dynamicznej, a składowe tensora naprężeń są liniowo zależne od składowych tensora prędkości deformacji. Równania (1 - 3) uzupełniono warunkami brzegowymi właściwymi dla rozpatrywanego układu przepływowego i typu zagadnienia. Zakłada się dalej, że w analizowanym układzie ma miejsce ustalony przepływ laminarny. Przyjmując, że w przekroju wlotowym γ_1 przepływ jest w pełni rozwinięty, z (1) otrzymuje się profil prędkości:

$$U(r) = \frac{3n+1}{n+1} U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right), \quad (7)$$

gdzie R jest promieniem rurociągu a U_0 średnią prędkością przepływu równą

$$U_0 = \frac{nR}{3n+1} \left(\frac{R}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n}. \quad (8)$$

Z równania (8) wynika, że prędkość średnia U_0 jest funkcją założonego gradientu ciśnienia $\partial p / \partial z$. Rozkład funkcji φ w przekroju γ_1 wyraża się wzorem

$$\varphi = \left(\frac{3n+1}{n} \frac{U_0}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/n} \right)^{n-1} \quad (9)$$

W przypadku ścianek rurociągu i powierzchni krywy (γ_4) zakłada się nieprzepuszczalność i brak poślizgu ($U = V = 0$). Na ściankach poziomych funkcja φ upraszcza się do:

$$\varphi = \left\{ 2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2} \quad (10)$$

a w przypadku ścianek pionowych

$$\varphi = \left\{ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2} \quad (11)$$

W osi symetrii γ_2 przyjmuje się $V = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} = 0$, a funkcję φ wyznacza się ze wzoru

$$\varphi = \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|^{n-1} \quad (12)$$

W przekroju wylotowym γ_3 warunki brzegowe sformułowano przy założeniu, że przekrój ten jest na tyle oddalony od zweźki, że jej wpływ na ruch płynu można już zaniedbać. Przyjęto $V = 0$, $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$, oraz $\partial\varphi/\partial z = 0$.

3. Numeryczne rozwiązanie równań modelu matematycznego

Układ równań różniczkowych rozwiązano metodą różnic skończonych na nierównomiernej siatce różnicowej. Obszar fizyczny otoczony jest rzędem „fikcyjnych” komórek, niezbędnych ze względu na zastosowany algorytm obliczeń i aproksymację warunków brzegowych. Fragment siatki różnicowej oraz sposób definiowania zmiennych przedstawia rys. 2.

Po wprowadzeniu związków wyrażających składowe tensora naprężeń do równań (1) i (2) równania te przedstawić można w uogólnionej zachowawczej formie

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (U\phi) + \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV\phi) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + S_\phi \quad (13)$$

Zmienna ϕ oznacza kolejno U i V . Współczynniki S_ϕ zestawiono w tabelicy 1. Po przyjęciu $\phi = 1$, $S_\phi = 0$ równanie (13) przechodzi w równanie ciągłości przepływu.

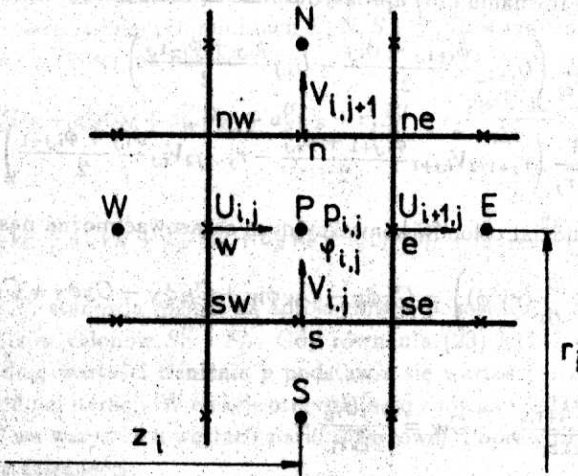
Człony dyfuzyjne równania (13) pomnożonego obustronnie przez r aproksymowane są na siatce różnicowej przedstawionej na rys. 2 za pomocą poniższych schematów różnicowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(rk\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) &\cong \frac{1}{\Delta z_i} \left[(r_j k\phi)_{i+1/2,j} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta z_{i+1}} + \right. \\ &\quad \left. - (r_j k\phi)_{i-1/2,j} \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta z_i} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

Tablica 1.

Współczynniki równania (13)

ϕ	S_ϕ
U	$\frac{\partial}{\partial z} (k\varphi \frac{\partial U}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk\varphi \frac{\partial V}{\partial r}) - \frac{\partial p}{\partial z}$
V	$\frac{\partial}{\partial z} (k\varphi \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk\varphi \frac{\partial V}{\partial r}) - \frac{\partial p}{\partial r} - 2k\varphi \frac{V}{r^2}$



Rys. 2. Fragment siatki różnicowej i oznaczenia węzłów

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk\varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \cong \frac{1}{\Delta r_j} \left[(rk\varphi)_{i,j+1/2} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta r_{j+1}} + (rk\varphi)_{i,j-1/2} \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta r_j} \right]. \quad (15)$$

Wielkości Δz_i , Δr_j , $\bar{\Delta z}_i$ oraz $\bar{\Delta r}_j$ zdefiniowane są następująco

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}, \quad \Delta r_j = r_j - r_{j-1},$$

$$\bar{\Delta z}_i = (\Delta z_i + \Delta z_{i+1})/2, \quad \bar{\Delta r}_j = (\Delta r_j + \Delta r_{j+1})/2,$$

Po przekształceniach, udział członów dyfuzyjnych w ogólnym równaniu różnicowym wyraża się następująco

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(rk\varphi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(rk\varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = D_E \phi_E + D_W \phi_W + D_N \phi_N + D_S \phi_S - D_P \phi_P, \quad (16)$$

gdzie

$$D_E = \frac{r_j k \varphi_{i+1/2}}{\Delta z_i \Delta z_{i+1}}, \quad D_N = \frac{r_{j+1/2} k \varphi_{j+1/2}}{\Delta r_j \Delta r_{j+1}},$$

$$D_W = \frac{r_j k \varphi_{i-1/2}}{\Delta z_i \Delta z_i}, \quad D_S = \frac{r_{j-1/2} k \varphi_{j-1/2}}{\Delta r_j \Delta r_j},$$

oraz:

$$D_P = D_E + D_W + D_N + D_S.$$

Człony konwekcyjne równania (13) aproksymowane są różnicami centralnymi

$$\frac{\partial}{\partial z}(rU\phi) = \frac{r_j}{\Delta z_i} \left(U_{i+1,j} \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j}}{2} - U_{i,j} \frac{\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{2} \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV\phi) = \frac{1}{\Delta r_j} \left(r_{j+1/2} V_{i,j+1} \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}}{2} - r_{j-1/2} V_{i,j} \frac{\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{2} \right). \quad (18)$$

Po przekształceniu udział członów konwekcyjnych oszacować można następująco:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial z}(rU\phi) + \frac{\partial}{\partial r}(rV\phi) \right) = C_E \phi_E - C_W \phi_W + C_N \phi_N - C_S \phi_S + C_P \phi_P, \quad (19)$$

gdzie:

$$C_E = \frac{\rho r_j U_{i+1,j}}{2 \Delta z_i}, \quad C_W = \frac{\rho r_j U_{i,j}}{2 \Delta z_i},$$

$$C_N = \frac{\rho r_{j+1/2} V_{i,j+1}}{2 \Delta r_j}, \quad C_S = \frac{\rho r_{j-1/2} V_{i,j}}{2 \Delta r_j},$$

oraz

$$C_P = C_E - C_W + C_N - C_S.$$

Dla zapewnienia stabilności schematu różnicowego łączny udział członów konwekcyjnych i dyfuzyjnych obliczany jest zgodnie z zasadą schematu hybrydowego, łączącego własności schematu typu „różnica centralna” oraz schematu typu „różnica jednostronna orientowana pod prąd” (Spalding 1972)

$$\left. \begin{aligned} a_N &= \max(D_N, |C_N|) - C_N, \\ a_S &= \max(D_S, |C_S|) + C_S, \\ a_E &= \max(D_E, |C_E|) - C_E, \\ a_W &= \max(D_W, |C_W|) + C_W. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Człon źródłowy równania (13) jest linearyzowany do postaci

$$S_\phi = S_P^\phi \phi_P + S_U^\phi. \quad (21)$$

Występujące w członach źródłowych pochodne cząstkowe jak również pochodne cząstkowe we wzorze (6) wyrażającym funkcję φ aproksymowane są na siatce różnicowej przy zastosowaniu schematu typu „różnica centralna”. Łącząc wyrażenia otrzymane przy różnicowej aproksymacji poszczególnych składników równania (13) otrzymuje się uogólnioną postać równania różnicowego

$$a_P^\phi \phi_P = a_E^\phi \phi_E + a_N^\phi \phi_N + a_S^\phi \phi_S + a_W^\phi \phi_W + r_j S_U^\phi, \quad (22)$$

gdzie

$$a_P^\phi = a_E^\phi + a_N^\phi + a_W^\phi + a_S^\phi + r_j S_P^\phi.$$

Równanie różnicowe (22) uzależnia wartość funkcji ϕ w punkcie P od odpowiednich wartości w czterech sąsiadujących punktach E, N, S i W . Równanie powyższe dla składowej U wektora prędkości ma postać

$$a_P^U U_P = a_E^U U_E + a_N^U U_N + a_W^U U_W + a_S^U U_S + r_j \tilde{S}_U^U + r_j \frac{p_W - p_P}{\Delta z_j}, \quad (23)$$

a dla składowej V

$$a_P^V V_P = a_E^V V_E + a_N^V V_N + a_W^V V_W + a_S^V V_S + r_{j-1/2} \tilde{S}_U^V + r_{j-1/2} \frac{p_S - p_P}{\Delta r_j}. \quad (24)$$

Wyrażenia \tilde{S}_U^U i \tilde{S}_U^V stanowią różnicową aproksymację pozostałych, obok pochodnych ciśnienia, składników członów S_U^U i S_U^V . Gdy równania (23) i (24) są rozwiązywane, w miejsce dokładnej wartości ciśnienia p podstawia się wartości przybliżone p^* , jako wartości z poprzedniej iteracji. W efekcie otrzymuje się z równań (23) i (24) przybliżone wartości U^* i V^* we wszystkich węzłach siatki różnicowej. Poprawna wartość ciśnienia p jest obliczana z zależności:

$$p = p^* + p', \quad (25)$$

gdzie p' jest poprawką ciśnienia obliczaną z oddzielnego równania. Wartości składowych U_P i V_P spełniające równanie ciągłości, oblicza się ze związków

$$U_P = U_P^* + D^U (p_W' - p_P'), \quad (26)$$

oraz

$$V_P = V_P^* + D^V (p_S' - p_P'), \quad (27)$$

gdzie

$$D^U = \frac{r_j}{\Delta z_j a_P^U}, \quad D^V = \frac{r_{j-1/2}}{\Delta r_j a_P^V},$$

tak, aby spełnione zostało równanie ciągłości w każdym punkcie siatki. Wartości poprawki ciśnienia otrzymuje się z rozwiązania równania Poissona, które wynika z podstawienia zależności (26) i (27) do różnicowej formy równania ciągłości (3). Po przekształceniach otrzymuje się:

$$a_{PP}^P = a_{EE}^P + a_{NN}^P + a_{WW}^P + a_{SS}^P + S_U^P, \quad (28)$$

gdzie

$$a_E^P = \frac{r_j}{\Delta z_i \Delta z_{i+1} a_P^U}, \quad a_W^P = \frac{r_j}{\Delta z_i \Delta z_i a_P^U},$$

$$a_N^P = \frac{r_{j+1/2}}{\Delta r_j \Delta r_{j+1} a_P^V}, \quad a_P^S = \frac{r_{j-1/2}}{\Delta r_j \Delta r_j a_P^V},$$

oraz:

$$S_U^P = \frac{r_j}{\Delta z_i} (U_{i,j}^* - U_{i+1,j}^*) + \frac{1}{\Delta r_j} (r_{j-1/2} V_{i,j}^* - r_{j+1/2} V_{i,j+1}^*).$$

Ze względu na nieliniowość równania modelu matematycznego rozwiązywane są metodą kolejnych przybliżeń. Po rozwiązaniu równań dla składowych U i V wektora prędkości oblicza się poprawkę ciśnienia p' z (28) oraz koryguje wartości U i V na podstawie równań (26) i (27). Znajomość pola prędkości pozwala na obliczenie funkcji φ w każdym punkcie siatki. Otrzymane rozwiązania są przybliżeniem dla kolejnego cyklu iteracyjnego. Proces iteracyjny jest kontynuowany aż do spełnienia kryterium zbieżności. Jako kryterium zbieżności stosowano warunek

$$\max\{\text{Res}(\phi)\} \leq \lambda_0, \quad (29)$$

gdzie

$$\text{Res}(\phi) = \max_{i,j} \left\{ a_P^{\phi} \phi_P - \sum_{N,S,E,W} a_j^{\phi} \phi_j - r_j S_U^{\phi} \right\}. \quad (30)$$

Kryterium residualne (29) jest warunkiem koniecznym zbieżności procesu iteracyjnego i postuluje spełnienie, z założoną dokładnością, równań różniczkowych dla każdej zmiennej we wszystkich punktach siatki. Wartość λ_0 dobiera się eksperymentalnie.

Algorytm obliczeń jest rozwinięciem metodyki stosowanej w pracy (Dobrowolski, Kabza 1982) na przepływy płynów potęgowych. W związku z pogorszeniem zbieżności procesu iteracyjnego dla wartości wykładnika $n < 0,5$, zastosowano podrelaksację dla składowych wektora prędkości i funkcji φ . Problemy ze zbieżnością procesu iteracyjnego sygnalizowano również w pracach Halmosa (1973), Halmosa i in. (1975). Wynikają one z pewnych własności równania (6), gdyż przy $n < 1$ i bliskich zeru wartościach pochodnych prędkości, wartość φ dąży do nieskończoności. W rozpatrywanych w pracy zagadnieniach sytuacja taka ma miejsce w okolicy osi symetrii oraz w przekroju wlotowym i wylotowym, gdzie z uwagi na założone warunki brzegowe większość składników równania (6) jest równa zeru. Spadek dokładności obliczeń i kłopoty ze zbieżnością przy $n < 0,5$ sygnalizowano także w pracy Giaquinty i Hunga (1968). Ozo i Churchill (1972) badając numerycznie konwekcję naturalną w płynach nienewtonowskich stwierdzili, że gdy φ przekroczy wartość 10^4 , proces iteracyjny jest niestabilny.

4. Wyniki obliczeń

Przepływy laminarne płynów nienewtonowskich występują znacznie częściej niż dla przypadku czynników newtonowskich. Związane jest to z dużą wartością współczynnika konsystencji szeregu płynów nienewtonowskich (Kembłowski, Kołodziejski 1972), znacznie większą od wartości współczynnika lepkości dynamicznej płynów newtonowskich. Stwierdzono również (Wilkinson 1963), że zakres ruchu przejściowego dla płynów nienewtonowskich jest kilkakrotnie większy niż dla płynów newtonowskich i zależy on również od wykładnika n . Pośród różnych definicji liczby Reynoldsa (Kembłowski, Kołodziejski 1972) przyjmowanych jako kryterium podobieństwa przepływów płynów newtonowskich najczęściej stosuje się uogólnioną liczbę Re'

$$Re' = \frac{U^{2-n'} D^{n'} \rho}{k' 8^{n-1}}, \quad (31)$$

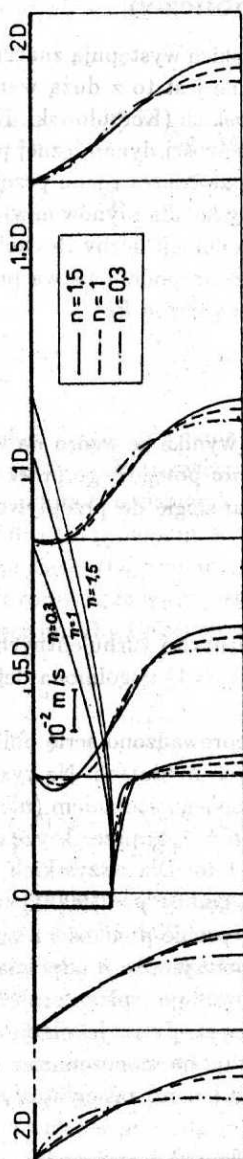
w której $n' = n$, a $k' = k \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n$. Jej postać wynika ze wzoru na współczynnik oporów liniowych dla laminarnego przepływu płynu potęgowego przez kanał o przekroju kołowym, po przyjęciu $\lambda = 64/Re'$. Poprzez analogię do przepływów płynów newtonowskich można przyjąć:

$$Re'_{kr} \cong 2100, \quad (32)$$

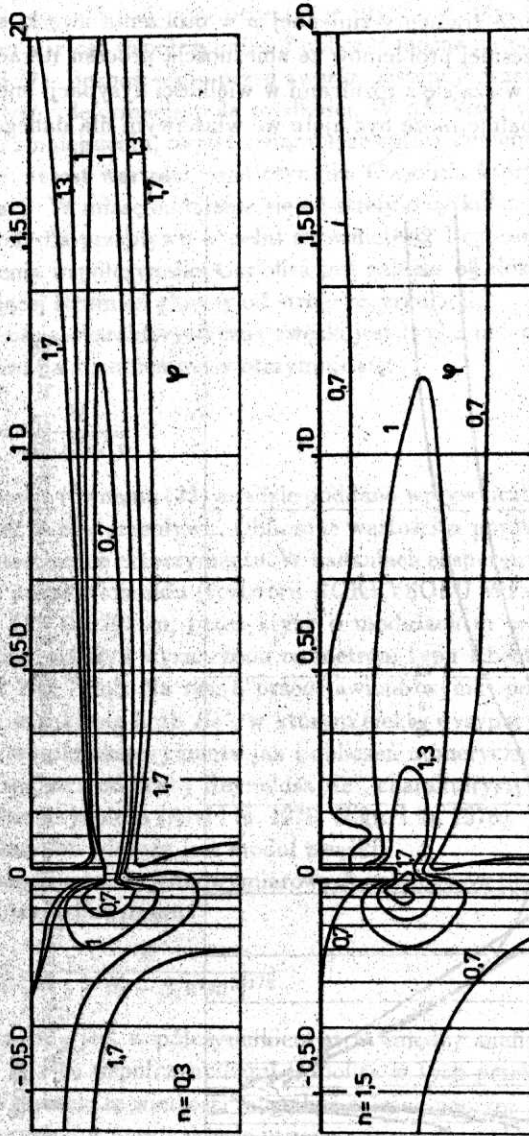
dla rozdzielenia zakresu występowania laminarnych i turbulentnych przepływów płynów potęgowych. Dla płynów newtonowskich ($n = 1$) uogólniona definicja (31) prowadzi do standardowej definicji liczby Reynoldsa.

W oparciu o przedstawiony algorytm przeprowadzono serię obliczeń dla przepływów płynów potęgowych przez kryzy o różnych modułach. Na rys. 3 przedstawiono profile prędkości dla przepływu płynu rozrzedzonego ścinaniem ($n = 0, 3$), newtonowskiego ($n = 1$) oraz zagęszczonego ścinaniem ($n = 1, 5$) przez kryżę o module $m = 0, 4$ zainstalowaną w rurociągu o średnicy $D = 0, 1$ m. Dla wszystkich przepływów przyjęto ten sam strumień masy $M = 0, 0785$ kg/s, gęstość $\rho = 1000$ kg/m³ i współczynnik konsystencji $k = 0, 01$ Nsⁿ/m². Przedstawione profile prędkości różnią się od siebie w sposób istotny. Wzrastającym wartościom współczynnika n odpowiadają rosnące wartości prędkości w osi układu. Zmniejszenie n powoduje „spłaszczenie” profilu w każdym przekroju. Na rys. 3 zaznaczono również zasięg strefy recyrkulacji dla analizowanych przepływów. Przeprowadzone obliczenia wskazują na monotoniczną zależność tej wielkości od n , a także na duży wpływ wykładnika n na zasięg strefy recyrkulacji przy przepływie przez kryzy o dużych modułach.

Na rys. 4 przedstawiono izolinie funkcji lepkości pozornej φ dla płynu rozrzedzonego ścinaniem ($n = 0, 3$) oraz dla płynu zagęszczonego ścinaniem ($n = 1, 5$). Charakterystyczne jest podobieństwo między rozkładami izolinii na obu rysunkach. Największe gradienty funkcji φ występują w bezpośrednim sąsiedztwie kryzy. Jest to obszar „zagęszczania” płynu przy $n = 1, 5$ oraz „rozrzedzania” dla $n = 0, 3$. Procesy te są związane z dużymi zmianami prędkości płynu w otoczeniu zwężki. W przypadku płynu rozrzedzonego ścinaniem, duże wartości φ występują w narożach w bezpośredniej bliskości ścianek kryzy i rurociągu, a także w sąsiedztwie osi symetrii w przekroju

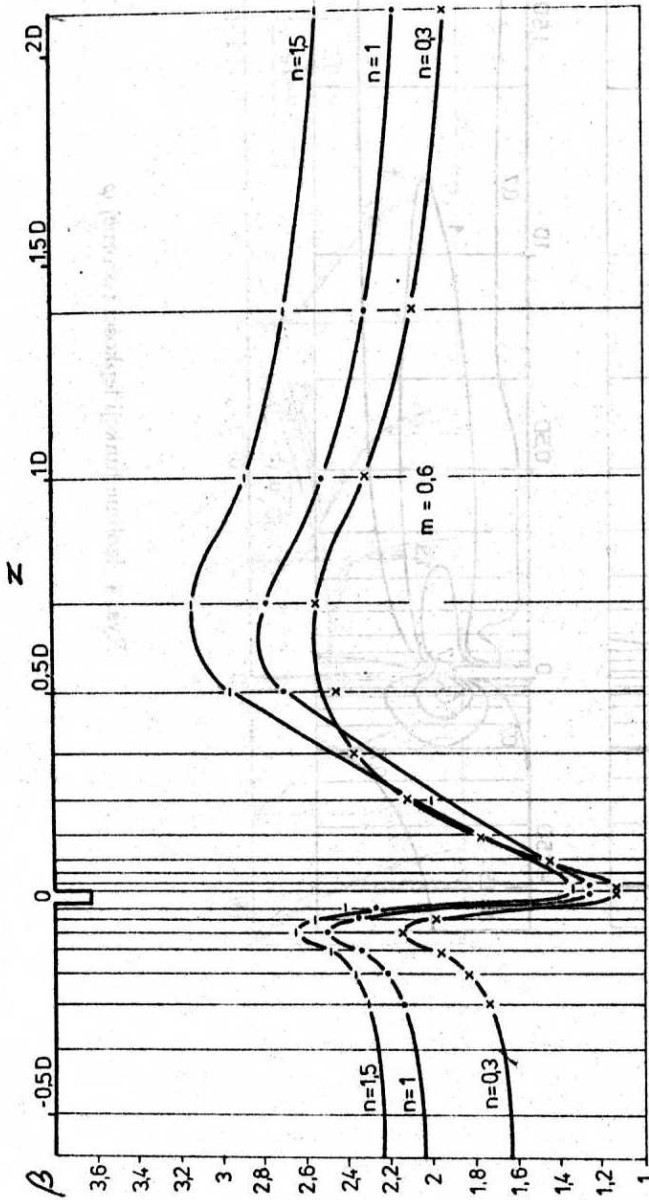


Rys. 3. Profile prędkości i zasięg recyrkulacji



Rys. 4. Izolinie funkcji lepkości pozornej ψ

wlotowym i wylotowym. Dla płynu zagęszczanego ścinaniem, w obszarach tych φ przyjmuje bardzo małe wartości. Duże gradienty zmiennej φ w otoczeniu zwężki są przyczyną sygnalizowanych już wcześniej problemów ze zbieżnością procesu iteracyjnego. Różnice w rozkładzie funkcji φ wiążą się z różnicami w wielkości dysypacji energii dla poszczególnych płynów, co globalnie może być ujęte we właściwym dla danego płynu współczynniku strat.



Rys. 5. Współczynnik Coriolisa β w funkcji współrzędnej osiowej strugi głównej

Rys. 5 przedstawia wartości współczynnika Coriolisa β w funkcji współrzędnej osiowej dla strugi głównej przy przepływie płynów o $n = 0,3, 1$ oraz $1,5$. W przekroju wlotowym wartość współczynnika β obliczyć można na podstawie założonego rozkładu prędkości (7). Bezpośrednio przed zwężką następuje wzrost wartości współczynnika β spowodowany deformacją pola prędkości. W przekroju zwężki wartość β ulega gwałtownemu zmniejszeniu, co jest związane ze splaszczaniem profilu prędkości. Za zwężką następuje wzrost wartości współczynnika Coriolisa, który osiąga maksimum za strefą recyrkulacji. W miarę oddalania się od strefy recyrkulacji β maleje, dążąc do wartości właściwych dla przepływu w pełni rozwiniętego. Bezpośrednio za zwężką, dokładność wyznaczenia współczynnika Coriolisa jest zależna od dokładności wyznaczenia izolunii oddzielającej strumień główny od strefy recyrkulacji.

Wielkością charakterystyczną zwężki jest liczba przepływu α . Korzystając ze znanego wzoru na strumień masy otrzymuje się:

$$\alpha = \frac{M}{A_0 \sqrt{2\rho\Delta p}} \quad (33)$$

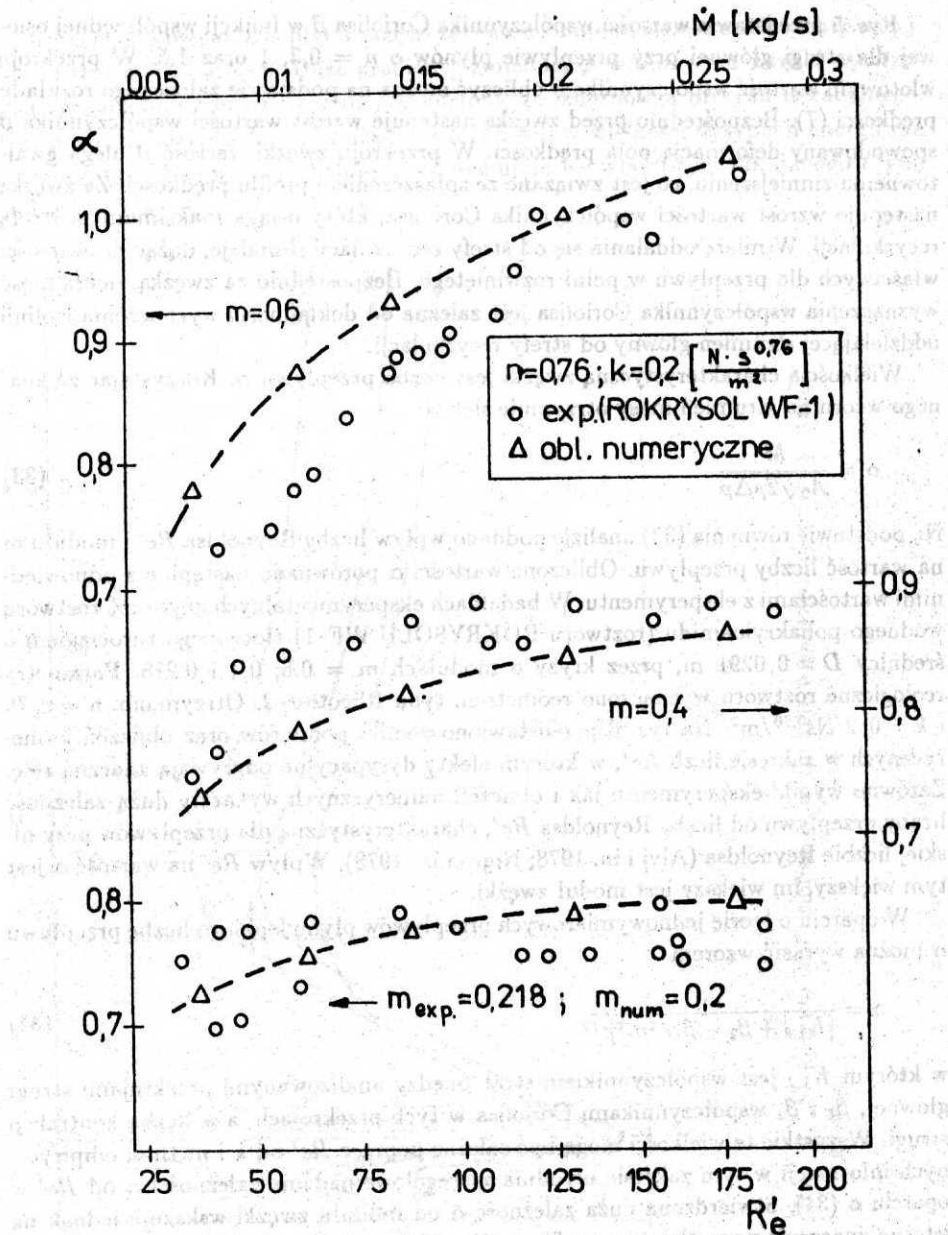
Na podstawie równania (33) analizie poddano wpływ liczby Reynoldsa Re' i modułu m na wartość liczby przepływu. Obliczone wartości α porównano następnie z odpowiednimi wartościami z eksperymentu. W badaniach eksperymentalnych użyto 1% roztworu wodnego poliakryloamidu (roztworu ROKRYSOLU WF-1) tłoczonego rurociągiem o średnicy $D = 0,0291$ m, przez kryzy o modułach $m = 0,6; 0,4$ i $0,218$. Parametry reologiczne roztworu wyznaczono reometrem typu Rheotest-2. Otrzymano: $n = 0,76$ i $k = 0,2 \text{ N s}^{0,76} / \text{m}^2$. Na rys. 6 przedstawiono wyniki pomiarów oraz obliczeń numerycznych w zakresie liczb Re' , w którym efekty dysypacyjne odgrywają znaczną rolę. Zarówno wyniki eksperymentu jak i obliczeń numerycznych wykazały dużą zależność liczby przepływu od liczby Reynoldsa Re' , charakterystyczną dla przepływów przy niskiej liczbie Reynoldsa (Alvi i in. 1978; Nigro i in. 1978). Wpływ Re' na wartość α jest tym większy, im większy jest moduł zwężki.

W oparciu o teorię jednowymiarowych przepływów płynu lepkiego liczbę przepływu α można wyrazić wzorem

$$\alpha = \frac{\kappa}{[K_{1,2} + \beta_2 - \beta_1 \kappa^2 m^2]^{1/2}} \quad (34)$$

w którym $K_{1,2}$ jest współczynnikiem strat między analizowanymi przekrojami strugi głównej, β_1 i β_2 współczynnikami Coriolisa w tych przekrojach, a κ liczbą kontrakcji strugi. Wszystkie te wielkości mogą być zależne poprzez Re' od k i n . Brak empirycznych informacji w tym zakresie utrudnia szczegółowe badanie zależności α od Re' w oparciu o (34). Stwierdzona duża zależność α od modułu zwężki wskazuje jednak na istotne znaczenie początkowego profilu prędkości (współczynnik β_1) na wartość liczby przepływu. Konieczna jest w tym zakresie realizacja dalszych badań teoretycznych i eksperymentalnych.

Przedstawione na rys. 6 porównanie wyników badań teoretycznych i eksperymentalnych wskazuje na dobrą jakościowo i częściowo ilościową zgodność wyników obu metod badawczych. Różnice między obliczonymi i zmierzonymi wartościami α mogą być



Rys. 6. Porównanie wyników pomiarów i obliczeń numerycznych liczby przepływu α kryzy

spowodowane zarówno sumarycznym błędem modelu matematycznego jak i błędami pomiaru liczby przepływu i charakterystyki $\tau = f(\dot{\gamma})$ badanego roztworu. Zagadnienie to wymaga dodatkowych badań teoretycznych oraz eksperymentalnych, zwłaszcza w zakresie pomiaru parametrów lokalnych przepływającej strugi, co pozwoli na pełną weryfikację wyników obliczeń numerycznych. Celowe jest również rozszerzenie badań na roztwory o innych stężeniach i przepływy w szerszym zakresie zmienności liczb Re' .

5. Wnioski

Sformułowany model matematyczny dwuwymiarowego przepływu płynu potęgowego Oswalda – De Waele zastosowano do badania zjawiska przepływu przez kryzę pomiarową. Wyniki obliczeń numerycznych wykorzystano do analizy pól prędkości i lepkości pozornej oraz liczby przepływu. Stwierdzono zależność zjawisk hydrodynamicznych od wartości parametrów reologicznych płynu. Weryfikację obliczeń numerycznych ograniczono, wobec braku odpowiednich danych empirycznych, do porównania wartości obliczonych i określonych eksperymentalnie liczby przepływu kryzy. Wyniki porównania wskazują na przydatność proponowanej metody do wstępnej oceny właściwości metrologicznych zjawisk przy pomiarach płynów nienewtonowskich. Zarówno badania teoretyczne, jak i eksperymentalne wykazały, że do pomiaru płynów nienewtonowskich należy stosować zwięzki o małych modułach z uwagi na wąski zakres zmienności α w funkcji uogólnionej liczby Reynoldsa Re' . Zasygnalizowano kierunki dalszych badań teoretycznych i eksperymentalnych.

Literatura

- Alvi S.H., Sridharan K., Lakshmana Rao N.S., 1978, *Loss characteristics of orifices and nozzles*, Journal of Fluids Engineering, Sept., Vol. 100, pp. 299–307.
- Astarita G., Marrucci G., 1974, *Principles of non-newtonian fluid mechanics*, McGraw-Hill.
- Bate H.G., 1967, *Orifice plate calibration in a dilute polymer solution*, Nature, Vol. 216, pp. 1100–1101.
- Chhabra R.P., Richardson I.F., 1985, *Flow of liquids through screens: Relationship between pressure drop and flow rate*, Chemical Engineering Science, Vol. 40, No. 2, pp. 313 – 316.
- Dobrowolski B., Kabza Z., Pospolita J., Spyra A., 1985, *Zastosowanie modelowania matematycznego i symulacji cyfrowej do oceny właściwości metrologicznych przepływomierzy*. Praca naukowo-badawcza wykonana na zlecenie Centrum Uczelniano-Przemysłowego Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Warszawskiej, Opole.
- Dobrowolski B., Kabza Z., 1982, *Numerical analysis of laminar viscous flow through a pipe orifice*. Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. IV No 1–2, pp. 29–46.

- Giaquinta A.R., Hung Tin-Kan., 1968, *Slow non-newtonian flow in a zone of separation*, J. of Eng. Mechanics Div. Proceedings of the Am. Soc. of Civil Engineers, Dec., pp. 1521-1538.
- Giles W.B., 1969, *Orifice flows of polyethylene oxide solutions*, Nature, Vol. 42, pp. 584-585.
- Halmos A.L., 1973, *The solution of the equations of motion for a non-newtonian liquid flowing through a sudden expansion using a numerical technique*, Report from the Chemical Engineering Department, School of Engineering, Monash University, Jan.
- Halmos A.L., Boger D.V., Cabelli A., 1975, *The behaviour of a power-law fluid flowing through a sudden expansion, Part. I. A Numerical Solution*, AIChE Journal Vol. 21, No. 3, pp. 540-549.
- Hasegawa T., Takano T., Yamada T., Narumi R., 1984, *An experimental study of the flow of dilute polymer solutions through thin slits*. Proc IX Int. Congress on Rheology, Mexico, pp. 175-182.
- Kemblowski Z., Kołodziejcki J., 1972, *Opory przepływu płynów nienewtonowskich w ruchu przejściowym i burzliwym*, Inżynieria Chemiczna II, 4, 603.
- Miller R.W., 1986, *Flow measurement engineering handbook*, McGraw-Hill Book Company.
- Nigro F.E., Strong A.B., Alpay S.A., 1978, *A numerical study of the laminar viscous incompressible flow through a pipe*, Proc. ASME. Paper 78-WA/FE-5.
- Ozoe H., Churchill S.W., 1972, *Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald de Waele and Ellis Fluids: The Development of a Numerical Solution*. AIChE J., Vol. 18, p. 1196.
- Shima N., 1984, *Loss and discharge characteristics of a flow of polymer solutions through pipe orifices*, Bull. of the ISME, Vol. 27. No. 225, pp. 443-449, March.
- Spalding D.B., 1972, *A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives*. Int. J. Num. Meth. in Eng. Vol. 4.
- Wągrowski Z., Janowski T., 1986, *Przepływomierz objętościowy do cieczy o dużych lepkościach. Charakterystyka i ocena eksploatacyjna*. Konferencja Naukowo-Techniczna „Pomiary przepływów i poziomów w energetyce”. Ślesin 16-18 kwietnia.
- Wilkinson W.L., 1963, *Ciecze nienewtonowskie*, WNT, Warszawa.
- Zachorski S., 1978, *Mechanika przepływów cieczy lepkosprężystych*. PWN, Warszawa-Poznań.

Summary

On the basis of differential equations of motion of continuous media, closed with Ostwald - De Waele constitutive equations for the power law fluid, a two-dimensional model of the power law fluid flow through the pipeline with the pipe orifice has been formulated. The system of partial differential equations has been solved with the finite difference method. System of non-linear algebraic equations has been solved with the iterative method. The results of numerical calculations for Newtonian fluids and for non-Newtonian fluids condensed and diluted with shearing have been presented. A detailed analysis has been carried out for distributions of velocity and apparent viscosity of the fluid as well as for discharge coefficient of the pipe orifice. It has been found that influence of rheological parameters of the fluid on the pipe orifice characteristics is a function of its modulus. Application of pipe orifices with small moduli for measurements of power law fluids has been suggested in consideration of a small range of variability of the discharge coefficient versus the generalized Reynolds number. The calculation results have been compared with the experimental data for the discharge coefficient.