

JANUSZ GRANATOWICZ, ROMUALD SZYMKIEWICZ

## Porównanie efektywności rozwiązania równań de Saint Venanta metodą elementów skończonych i metodą różnic skończonych

### 1. Wprowadzenie

Układ równań de Saint-Venanta, opisujący przepływ nieustalony w kanałach otwartych, o postaci:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1b)$$

gdzie:  $x, t$  – położenie i czas,  $Q = Q(x, t)$  – natężenie przepływu,  $h = h(x, t)$  – rzędna zwierciadła wody,  $A$  – powierzchnia przekroju czynnego,  $B$  – szerokość kanału na poziomie zwierciadła wody,  $g$  – przyspieszenie grawitacyjne,  $S = \frac{n^2 |Q|}{R^{4/3} A^2}$  – spadek hydrauliczny,  $n$  – współczynnik szorstkości wg Manninga,  $R$  – promień hydrauliczny, dla zadanych warunków początkowych i brzegowych rozwiązuje się metodami numerycznymi stosując przede wszystkim metodę różnic skończonych. Szerokie omówienie problemów związanych z tą metodą w odniesieniu do układu (1) można znaleźć między innymi w [2,9], gdzie zestawiono opisy i porównanie wielu schematów różnicowych. Schematy te różnią się między sobą własnościami numerycznymi i skutecznością co powoduje, że, niektóre z nich są chętniej stosowane w praktyce zaś inne mniej. Jednym z częściej stosowanych schematów jest schemat niejawni Preissmana [2].

Układ równań de Saint-Venanta można rozwiązywać również metodą elementów skończonych. Metoda ta, szeroko stosowana w wielu zagadnieniach techniki, nie znalazła jak dotąd większego zastosowania w hydraulice koryt otwartych. Według autorów np. [2] wynika to z braku wyraźnych korzyści jakie daje ta metoda w stosunku do metody różnic

skończonych. Opinia ta nie jest podzielana przez wszystkich, gdyż z kolei autorzy [6] stwierdzają, że metoda elementów skończonych może być z powodzeniem stosowana do rozwiązywania układu (1) i wykazują przy tym szereg korzystnych jej cech. Być może przyczyną różnych opinii na ten temat są wybrane do porównań schematy różnicowe, które jak wiadomo, różnią się między sobą skutecznością.

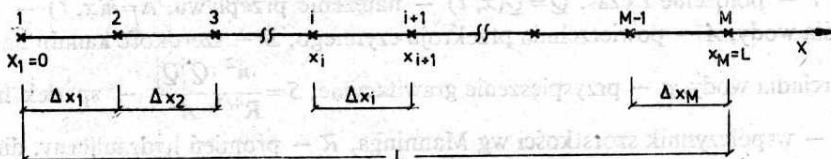
W niniejszej pracy podejmujemy próbę skonfrontowania obu metod przyjmując do porównań najskuteczniejszy naszym zdaniem schemat różnicowy, a mianowicie schemat niejawną Preissmana.

## 2. Rozwiązanie układu de Saint-Venanta z zastosowaniem metody elementów skończonych

Do rozwiązania układu (1) zastosujemy metodę elementów skończonych w sformułowaniu Galerkiina [11]. Obszar rozwiązania układu (1) – odcinek kanału o długości  $L$  – dzielimy na  $M-1$  odcinków o długościach  $\Delta x_i$  (rys. 1). Zgodnie z metodą Galerkiina rozwiązanie układu (1) musi spełniać warunek:

$$\int_0^L \Omega([N]\{\Phi\})[N]^T dx = 0 \quad (2)$$

gdzie:  $\Omega$  – symboliczny zapis układu (1),  $L$  – długość kanału,  $[N] = [N_1, N_2, \dots, N_i, N_{i+1}, \dots, N_M]$  – funkcje bazowe zależne tylko od  $x$ ,  $\{\Phi\} = \{Q_1(t), h_1(t), Q_2(t), h_2(t), \dots, Q_M(t), h_M(t)\}^T$  – wektor utworzony z funkcji  $Q$  oraz  $h$  w węzłach obszaru.



Rys. 1. Podział osi kanału na elementy

Warunek ten sprowadza zagadnienie do układu równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu. Mając na uwadze fakt, że całka w całym obszarze równa jest sumie całek w kolejnych elementach  $i$  ( $i=1, 2, M-1$ ) warunek (2) przyjmie postać:

$$\int_0^L \Omega([N]\{\Phi\})[N]^T dx = \sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Omega([N]_i\{\Phi\}_i)[N]_i^T dx. \quad (3)$$

Można więc obliczyć całki w każdym elemencie oddzielnie i zsumować je w celu otrzymania układu globalnego. Sposób budowania układu globalnego jest typowy dla metody elementów skończonych [11]. Szczegóły dotyczące przypadku układu de Saint-Venanta przedstawiono np. w [1, 7]. Podobnie jak tam przyjmujemy tutaj liniowe funkcje bazowe. Dowolną funkcję  $f(x, t)$  występującą w układzie (1) zastępujemy się w elemencie  $i$  funkcją apro-

ksymującą  $f_a$ :

$$f_a(x, t) = [N]_i \{f\}_i = N_i(x) f_i(t) + N_{i+1}(x) f_{i+1}(t) \quad (4)$$

gdzie:

$$N_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i}, \quad N_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \quad \text{dla } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

$$N_i(x), N_{i+1}(x) = 0 \quad \text{dla } x \in [x_1, x_i) \cup (x_{i+1}, x_M].$$

Jest to aproksymacja drugiego rzędu. Warunek (3) dla układu (1) ma postać:

$$\sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{n^2}{R^{4/3}} \frac{Q|Q|}{A} \right] \begin{Bmatrix} N_i(x) \\ N_{i+1}(x) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (5a)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \begin{Bmatrix} N_i(x) \\ N_{i+1}(x) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (5b)$$

Po dokonaniu całkowania powyższych równań z uwzględnieniem aproksymacji występujących w nich funkcji formułą (4) otrzymuje się globalny układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$[S] \{\Phi\}' + [C] \{\Phi\} = \{0\} \quad (6)$$

gdzie:  $[S]$  jest macierzą o elementach stałych, otrzymaną z całkowania po czasie pochodnych funkcji  $Q$  i  $h$ ; jest ona pasmowa i symetryczna.

$$\{\Phi\}' = \left\{ \frac{dQ_1}{dt}, \frac{dh_1}{dt}, \dots, \frac{dQ_i}{dt}, \frac{dh_i}{dt}, \frac{dQ_{i+1}}{dt}, \frac{dh_{i+1}}{dt}, \dots, \frac{dQ_M}{dt}, \frac{dh_M}{dt} \right\}^T$$

$$\{\Phi\} = \{Q_1, h_1, \dots, Q_i, h_i, Q_{i+1}, h_{i+1}, \dots, Q_M, h_M\}^T$$

$[C]$  jest macierzą pasmową niesymetryczną; jest to macierz zmienna, której elementy zależą od  $\{\Phi\}$ ;

W układzie (6) dwie składowe wektora  $\{\Phi\}$  są znane, gdyż zadane są jako warunek brzegowy problemu. Jest to więc układ równań różniczkowych zwyczajnych o wymiarze  $2(M-1) \times 2(M-1)$  przy czym macierze  $[S]$  i  $[C]$  są siedmioprzekątniowe. Rozwiązanie układu (6) to typowe zagadnienie początkowe dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. Można je zatem rozwiązać klasycznymi metodami rozwiązywania tego typu zagadnień. Stosowanie metod jawnych jest nieatrakcyjne, gdyż wymagają one silnego ograniczenia wielkości kroku czasowego dla zapewnienia stabilności rozwiązania. W tej sytuacji metoda różnic skończonych byłaby bardziej efektywna, gdyż przy takim samym ograniczeniu kroku czasowego rozwiązuje się układ z macierzą diagonalną (np. w schemacie Laxa-Wendroffa) podczas gdy w metodzie elementów skończonych macierz jest siedmioprzekątniowa. Najlepszymi metodami dla tego typu zagadnień są metody  $A$ -stabilne, czyli absolutnie stabilne. Wiadomo jednak [5], że metoda  $A$ -stabilna musi być niejawna i nie może być rzędu wyższego niż 2. Warunki te spełniają dwie metody: metoda niejawna Eulera (pierwszego rzędu) i niejawna metoda trapezów (drugiego rzędu). Można je zapisać w ogólnej

postaci następująco:

$$\{\Phi\}_{t+\Delta t} = \{\Phi\}_t + \Delta t [(1-\theta)\{\Phi\}'_t + \theta\{\Phi\}'_{t+\Delta t}] \quad (7)$$

gdzie  $\Delta t$  – krok całkowania w czasie

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{dla metody niejawnnej Eulera} \\ 0,5 & \text{dla metody niejawnnej trapezów.} \end{cases}$$

Zastosowanie powyższych metod do układu (6) daje układ równań:

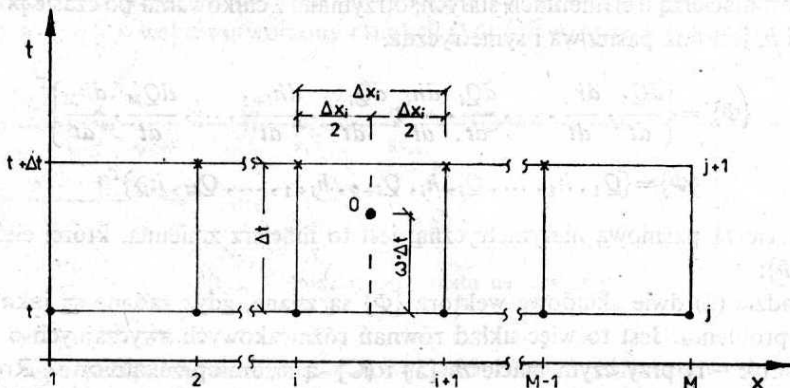
$$[S]\{\Phi\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t - \Delta t \theta [C]_{t+\Delta t} \{\Phi\}_{t+\Delta t} \quad (8)$$

gdzie:  $\{u\}_t = ([S] - \Delta t(1-\theta)[C]_t)\{\Phi\}_t$ ,

który jest układem algebraicznych równań nieliniowych. Układ ten można rozwiązać albo metodą iteracji prostej albo metodą Newtona [3].

### 3. Rozwiązanie układu równań de Saint-Venanta metodą różnic skończonych

Do porównania metod przyjęto znany schemat niejawnny Preissmana. Ma on dobre własności numeryczne, a jego skuteczność sprawdzono w wielu praktycznych zastosowaniach [4]. Szczegółowy opis schematu można znaleźć np. w pracach [2,9]. Tutaj przypomni-



Rys. 2. Siatka różnicowa dla schematu Preissmana

my krótko jego ideę. W schemacie tym wartości funkcji i jej pochodnych aproksymuje się w punkcie 0 usytuowanym jak na rysunku 2. Przybliżone wartości określa się następująco:

$$f_0 \cong \frac{1}{2} [(1-\omega)(f_i^j + f_{i+1}^j) + \omega(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1})] \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x_i} [(1-\omega)(f_{i+1}^j - f_i^j) + \omega(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1})] \quad (10)$$

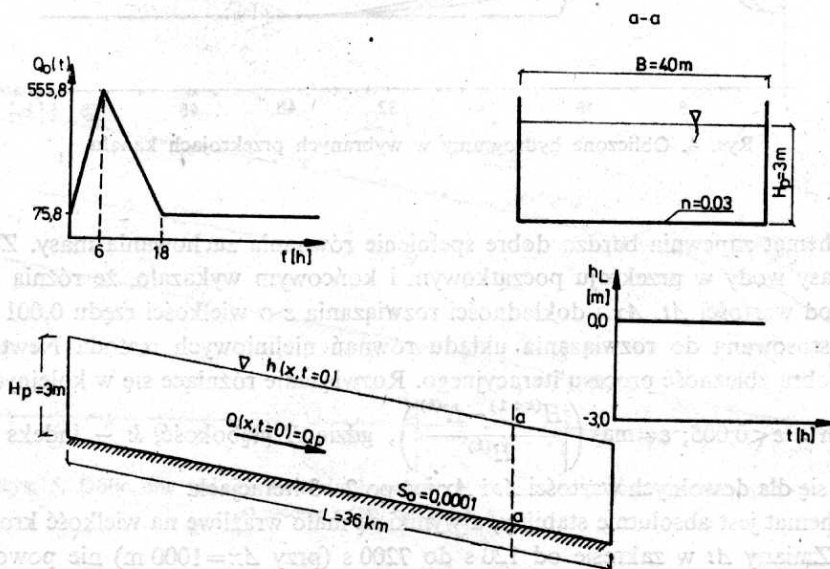
$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \cong \frac{1}{2\Delta t} (f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} - f_{i+1}^j - f_i^j) \quad (11)$$

Jeśli zastąpimy w układzie (1) występujące w nim funkcje  $h$ ,  $Q$ ,  $A$ , ... oraz ich pochodne aproksymacjami (9), (10), (11) otrzymamy dla każdego oczka siatki 2 równania różnicowe wiążące ze sobą wartości funkcji w punktach  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j+1)$  oraz  $(i+1, j+1)$  przy czym wartości z poziomu czasowego  $j$  są znane. Pisząc podobne równania różnicowe dla każdego oczka siatki uzyskuje się układ  $2(M-1)$  równań różnicowych, w którym występuje  $2M$  funkcji węzłowych  $h$  oraz  $Q$ . Ponieważ w układzie tym dwie funkcje w skrajnych węzłach są znane jako zadane warunki brzegowe, do rozwiązania pozostaje układ  $2(M-1)$  równań o takiej samej liczbie niewiadomych. Jest to układ nieliniowych równań algebraicznych. Macierz tego układu jest macierzą pasmową pięcioprzekątniową. Do jego rozwiązania stosuje się metodę Newtona.

#### 4. Eksperymenty numeryczne

Dla porównania efektywności metod rozwiązania równań de Saint-Venanta wykonano eksperymenty numeryczne. W pierwszej fazie obliczenia przeprowadzono dla prostoliniowego kanału o arbitralnie przyjętych danych. Były one następujące (rys. 3):

– kanał o długości 36 km ma stały spadek dna  $S_0 = 0,0001$ , przekrój prostokątny o szerokości  $B = 40$  m oraz stały współczynnik szorstkości wg Manninga  $n = 0,03$ ;



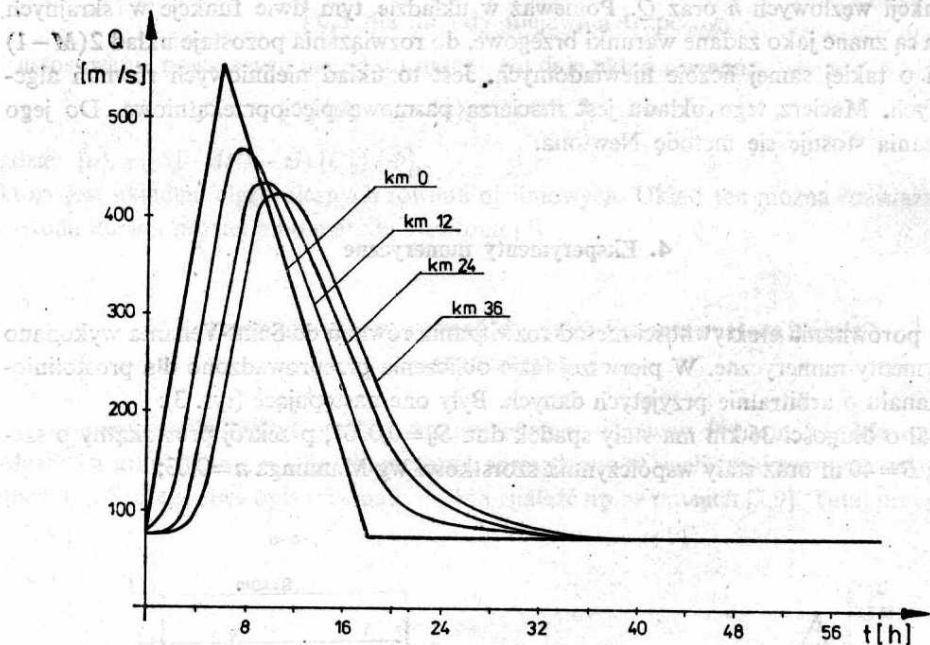
Rys. 3. Schemat kanału i warunki brzegowe dla przykładu 1

– w chwili  $t=0$  w kanale panuje przepływ ustalony jednostajny o natężeniu  $Q_p = 75,8 \text{ m}^3/\text{s}$  i głębokości  $H_p = 3$  m;  
 – warunki brzegowe są następujące:  
 na brzegu lewym przyjmuje się funkcję  $Q(x=0, t) = Q_0(t)$  o postaci jak na rysunku 3;

na brzegu prawym przyjmuje się funkcję  $h(x=L, t) = h_1(t) = \text{const}$  taką, że głębokość na końcu jest stała i wynosi 3 m.

Rozwiązanie powyższego przykładu metodą różnic skończonych wykazało, że:

1. Najlepsze rezultaty otrzymuje się dla  $\omega = 0,6$ . Jest to zgodne z informacjami podanymi na ten temat w [2].



Rys. 4. Obliczone hydrogramy w wybranych przekrojach kanału

2. Schemat zapewnia bardzo dobre spełnienie równania zachowania masy. Zbilansowanie masy wody w przekroju początkowym i końcowym wykazało, że różnią się one, zależnie od wartości  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  i dokładności rozwiązania  $\varepsilon$  o wielkości rzędu 0,001 - 0,1%.

3. Zastosowana do rozwiązania układu równań nieliniowych metoda Newtona zapewnia dobrą zbieżność procesu iteracyjnego. Rozwiązanie różniące się w kolejnych przybliżeniach o  $\varepsilon < 0,005$ ;  $\varepsilon = \max \left( \left| \frac{H^{(k+1)} - H^{(k)}}{H^{(k)}} \right| \right)$ , gdzie  $H$  głębokość,  $k$  - indeks iteracji)

uzyskuje się dla dowolnych wartości  $\Delta t$  i  $\Delta x$  już po 2 - 3 iteracjach.

4. Schemat jest absolutnie stabilny, a wyniki są mało wrażliwe na wielkość kroku czasowego. Zmiany  $\Delta t$  w zakresie od 120 s do 7200 s (przy  $\Delta x = 1000$  m) nie powodowały większych zmian otrzymywanych wyników.

5. Lepsze wyniki daje aproksymacja wprost całych członów równań (1) niż aproksymacja poszczególnych funkcji występujących w członach.

Powyższe wnioski potwierdzają znane z literatury, dobre własności niejawnego schematu Preissmana. Przykłady otrzymanych wyników przedstawiono na rysunku 4. Są to obliczone funkcje  $Q(t)$  w wewnętrznych węzłach kanału.

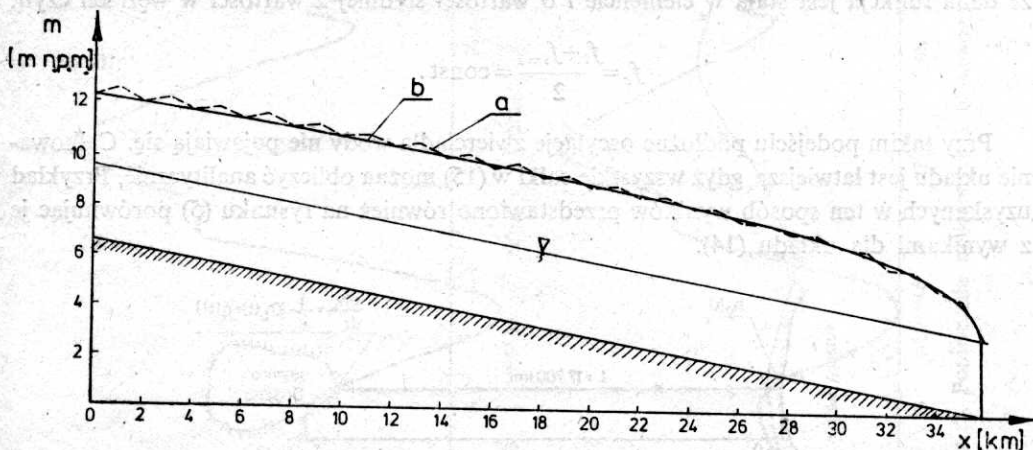
Nieco szerzej musimy potraktować metodę elementów skończonych, gdyż nie jest ona jeszcze tak dobrze opisana w literaturze jak metoda różnic skończonych. Jak już stwierdziliśmy, do rozwiązania nieliniowego układu równań (8) można zastosować metodę iteracji prostej. Jednak metoda ta jest warunkowo zbieżna i nigdy nie ma pewności czy przyjęty schemat iteracyjny – jeden z wielu możliwych – jest zbieżny. Zbieżność zależy również od wielkości  $\Delta t$ . Może się okazać, że w niektórych przypadkach, dla jej zapewnienia konieczne jest silne ograniczenie kroku czasowego [3]. Metodę tę należy więc stosować z ostrożnością. W tym przypadku najprostszy schemat iteracyjny dla układu (8) o postaci:

$$[S]\{\Phi\}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \{u\}_t - \theta \Delta t [C]_{t+\Delta t}^{(k)} \{\Phi\}_{t+\Delta t}^{(k)} \quad (12)$$

gdzie:  $k$  – indeks iteracji, dla zapewnienia zbieżności wymaga takiego ograniczenia  $\Delta t$  jak jawne schematy różnicowe. Wystarczy jednak przyjąć inny schemat iteracyjny:

$$([S] + \theta \Delta t [C]_{t+\Delta t}^{(k)}) \{\Phi\}_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \{u\}_t \quad (13)$$

a okazuje się, że dla  $\Delta t$  nie ma praktycznie żadnych ograniczeń. Pewną wadą tego schematu jest stosunkowo wolne tempo zbieżności. Z tego powodu do rozwiązywania układów typu (8) zaleca się, jako bardziej efektywną, metodę Newtona [3,5]. Obliczenia wykonane obu metodami wykazały, że dokładność rozwiązania na poziomie  $\varepsilon = 0,05\%$  otrzymuje się metodą Newtona już po 2 - 3 iteracjach, zaś metodą iteracji prostej po 7 - 8 iteracjach. Stwierdzono jednak, że w schemacie (13) można ograniczyć liczbę iteracji do 2 otrzymując  $\varepsilon \leq 2\%$  co zapewnia jeszcze wystarczająco dokładne wyniki.



Rys. 5. Obliczone układy zwierciadła wody metodą elementów skończonych  
a) zgodnie z (14), b) zgodnie z (15)

Charakterystycznym objawem spotykanym w trakcie obliczeń były podłużne oscylacje zwierciadła wody (rys. 5). Są to dobrze znane oscylacje typu  $2\Delta x$ , charakterystyczne dla niektórych schematów różnicowych. Efekty takie obserwowali także autorzy prac [1, 7]. Przyczyną tego jest sposób aproksymacji członów nieliniowych w równaniach różnicowych. Dla zlikwidowania tych oscylacji autorzy [7] proponują zmianę sposobu obliczania wartości funkcji na brzegach lub modyfikację wyników w węzłach parzystych.

Według nas oscylacje można wyeliminować inaczej. Oscylacje występują wtedy, gdy wszystkie funkcje występujące w (5a) i (5b) aproksymuje się wg (4). Układ (5) będzie więc następujący:

$$\sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{\partial Q_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_a^2}{A_a} \right) + g A_a \frac{\partial h_a}{\partial x} + g \frac{n_a^2 Q_a |Q_a|}{R_a^{4/3} A_a} \right] \begin{Bmatrix} N_i(x) \\ N_{i+1}(x) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (14a)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{\partial h_a}{\partial t} + \frac{1}{B_a} \frac{\partial Q_a}{\partial x} \right) \begin{Bmatrix} N_i(x) \\ N_{i+1}(x) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (14b)$$

gdzie indeks  $a$  oznacza aproksymację według (4). Zamiast tego proponujemy następujące podejście:

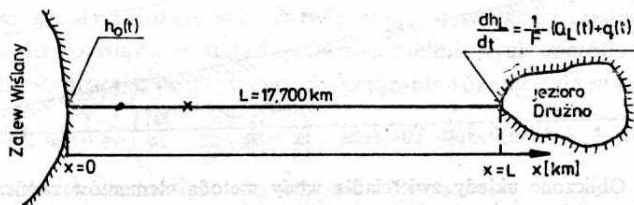
$$\sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{\partial Q_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_c^2}{A_c} \right) + g A_c \frac{\partial h_c}{\partial x} + \left( \frac{g n_c^2 Q_c |Q_c|}{R_c^{4/3} A_c} \right) \right] \begin{Bmatrix} N_i(x) \\ N_{i+1}(x) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (15a)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{\partial h_c}{\partial t} + \frac{1}{B_c} \frac{\partial Q_c}{\partial x} \right) \begin{Bmatrix} N_i(x) \\ N_{i+1}(x) \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (15b)$$

W równaniach tych  $a$ , jak poprzednio, oznacza aproksymację według (4) zaś  $c$  oznacza, że dana funkcja jest stała w elemencie  $i$  o wartości średniej z wartości w węzłach czyli:

$$f_c = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} = \text{const.}$$

Przy takim podejściu podłużne oscylacje zwierciadła wody nie pojawiają się. Całkowanie układu jest łatwiejsze, gdyż wszystkie całki w (15) można obliczyć analitycznie. Przykład uzyskanych w ten sposób wyników przedstawiono również na rysunku (5) porównując je z wynikami dla układu (14).

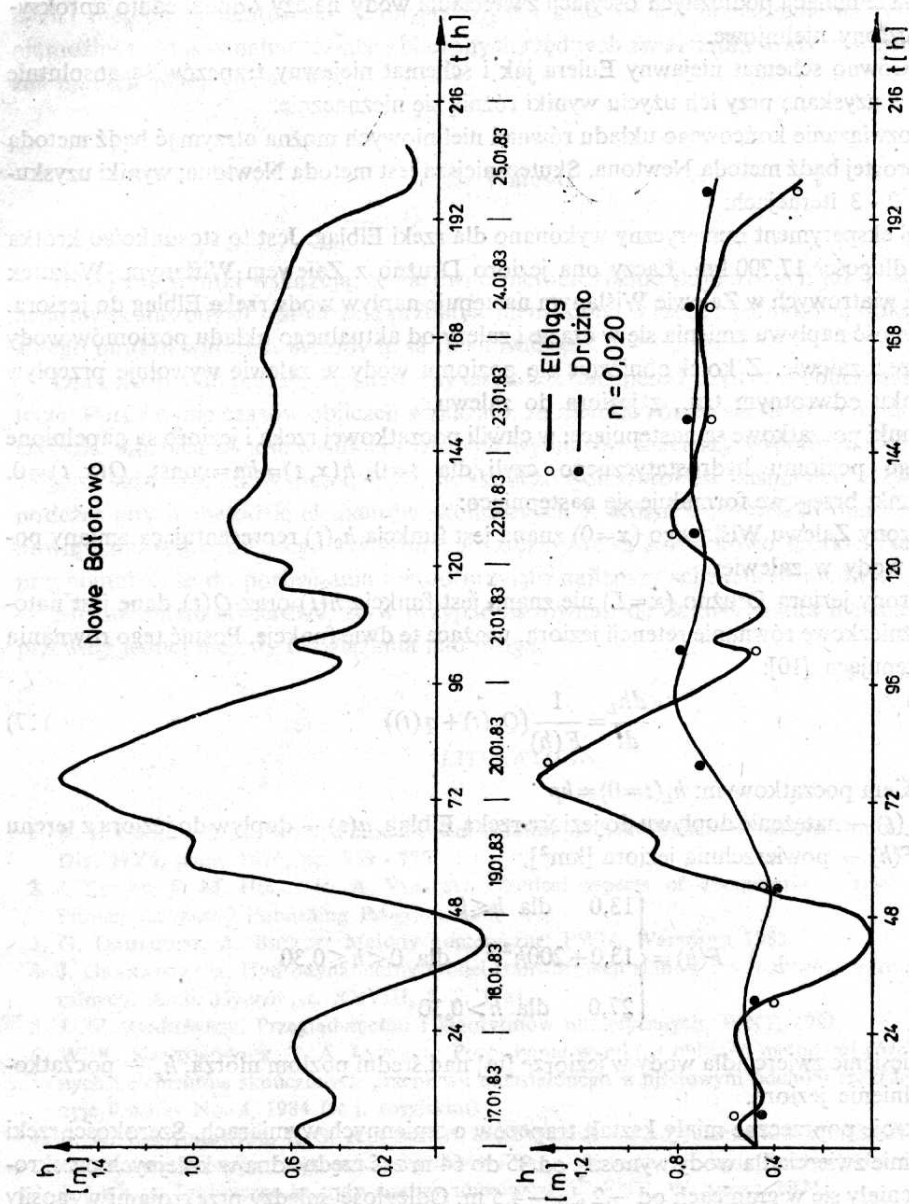


Rys. 6. Schemat rzeczywistego systemu: Zalew Wiślany, rzeka Elbląg, jezioro Drużno

Wyniki otrzymane dla takich samych danych metodą elementów skończonych różniły się bardzo nieznacznie od wyników otrzymanych metodą różnic skończonych. Otrzymane różnice rzędu 1 mm dla głębokości i 0,1 m<sup>3</sup>/s dla przepływów są niezauważalne w skali przyjętej na rysunku (4). Reasumując można stwierdzić, że:

1. W metodzie elementów skończonych uzyskuje się bardzo dobre spełnienie równania





Rys. 7. Porównanie obliczonych i obserwowanych stanów w przekroju Elbląg i jeziorze Drużno

zachowania masy. Otrzymywane wyniki były nawet nieco lepsze niż w metodzie różnic skończonych.

2. Dla eliminacji podłużnych oscylacji zwierciadła wody należy odpowiednio aproksymować człony nieliniowe.

3. Zarówno schemat niejawnny Eulera jak i schemat niejawnny trapezów są absolutnie stabilne, a uzyskane przy ich użyciu wyniki różnią się nieznacznie.

4. Rozwiązanie końcowego układu równań nieliniowych można otrzymać bądź metodą iteracji prostej bądź metodą Newtona. Skuteczniejsza jest metoda Newtona; wyniki uzyskuje się w 2 - 3 iteracjach.

Drugi eksperyment numeryczny wykonano dla rzeki Elbląg. Jest to stosunkowo krótka rzeka o długości 17,700 km. Łączy ona jezioro Drużno z Zalewem Wiślanym. Wskutek spięrzeń wiatrowych w Zalewie Wiślanym następuje napływ wody rzeką Elbląg do jeziora. Intensywność napływu zmienia się w czasie i zależy od aktualnego układu poziomów wody w jeziorze i zalewie. Z kolei obniżenie się poziomu wody w zalewie wywołuje przepływ w kierunku odwrotnym tzn., z jeziora do zalewu.

Warunki początkowe są następujące: w chwili początkowej rzeka i jezioro są napełnione do stałego poziomu hydrostatycznego, czyli dla  $t=0$ ,  $h(x, t)=h_p = \text{const}$ ,  $Q(x, t)=0$ .

Warunki brzegowe formułuje się następująco:

– od strony Zalewu Wiślanego ( $x=0$ ) znana jest funkcja  $h_0(t)$  reprezentująca zmiany poziomów wody w zalewie:

– od strony jeziora Drużno ( $x=L$ ) nie znana jest funkcja  $h(t)$  oraz  $Q(t)$ , dane jest natomiast różniczkowe równanie retencji jeziora, wiążące te dwie funkcje. Postać tego równania jest następująca [10]:

$$\frac{dh_L}{dt} = \frac{1}{F(h)} (Q_L(t) + q(t)) \quad (17)$$

z warunkiem początkowym:  $h_L(t=0) = h_p$

gdzie:  $Q_L(t)$  – natężenie dopływu do jeziora rzeką Elbląg,  $q(t)$  – dopływ do jeziora z terenu zlewni,  $F(h)$  – powierzchnia jeziora [ $\text{km}^2$ ],

$$F(h) = \begin{cases} 13,0 & \text{dla } h \leq 0 \\ 13,0 + 200h^{2,2} & \text{dla } 0 < h \leq 0,30 \\ 27,0 & \text{dla } h > 0,30 \end{cases}$$

$h$  – wzniesienie zwierciadła wody w jeziorze [m] nad średni poziom morza,  $h_p$  – początkowe napełnienie jeziora.

Przekroje poprzeczne miały kształt trapezów o zmiennych wymiarach. Szerokości rzeki na poziomie zwierciadła wody wynosiły od 35 do 64 m zaś rzędne dna w kolejnych przekrojach zmieniały się w granicach od  $-2$  do  $-4,5$  m. Odległości między przekrojami wynosiły 0,7 - 1,0 km. Wyniki obliczeń obydwiema metodami przedstawiono na rysunku 6. Krzywa  $a$  reprezentuje warunek brzegowy od strony Zalewu Wiślanego, w którym notowano zmiany poziomów wody w okresie 17 - 24.01.1983 r. Krzywa  $c$  reprezentuje obliczone zmiany poziomów wody w jeziorze Drużno, czyli w punkcie  $x=L$ , zaś krzywa  $b$  jest wynikiem dla przekroju położonego w odległości 5 km od jeziora. Dla porównania naniesiono pomierzone

poziomy wody (1 raz na dobę) w tych samych przekrojach. Wyniki te otrzymano dla  $n=0,02$  oraz  $\Delta t=3600$  s. Na rysunku zaznaczono tylko pojedyncze krzywe. Okazało się bowiem, tak jak i w pierwszym przykładzie, że różnice wyników uzyskanych metodą różnic skończonych i metodą elementów skończonych były tak małe, że ich zaznaczenie na rysunku jest niemożliwe. Maksymalne różnice obliczonych rzędnych zwierciadła wody wynosiły  $\sim 0,5\%$  zaś natężeń przepływów  $\sim 2\%$ .

## 5. Wnioski

Uzyskane wyniki wskazują, że zarówno metoda różnic skończonych jak i metoda elementów skończonych, odtwarzają przepływ nieustalony w rzece z jednakową dokładnością. Z tego punktu widzenia metody te są równoważne.

Dla zastosowań praktycznych istotny jest koszt obu metod, czyli czas obliczeń na komputerze. Porównanie czasów obliczeń wykazało, że metoda różnic skończonych jest ok. 30% szybsza. Różnica ta jest wynikiem różnych wymiarów macierzy współczynników końcowego układu równań. W metodzie różnic skończonych szerokość pasma macierzy wynosi 5, podczas gdy w metodzie elementów skończonych 7. Różnice w czasach obliczeń nie stanowią jednak decydującego kryterium, gdyż czasy te są stosunkowo krótkie. Należy tutaj przypomnieć, że do porównania metod przyjęto najlepszy schemat różnicowy.

Można zatem stwierdzić, że w przypadku równań de Saint-Venanta nie ma wyraźnej przewagi jednej metody rozwiązania nad drugą.

## LITERATURA

1. R. L. COOLEY, S. A. MOIN: Finite element solution of Saint-Venant equations, Journ. Hydraulics Div. HY6, jaune 1976, pp. 759 - 775.
2. J. CUNGE, F. M. HOLLY jr, A. VERWEY: Practical aspects of computational river hydraulics, Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
3. G. DAHLQUIST, A. BJORCK: Metody numeryczne: PWN, Warszawa 1983.
4. J. GRANATOWICZ: Hydrodynamiczny model transformacji stanów i przepływów w korytach naturalnych. Arch. Hydrot., t. XXVIII, z. 2, 1981.
5. J. M. JANKOWSCY: Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1981.
6. W. K. KANTOROWICZ, T. A. LYSENKO: Porównanie wyników obliczeń metodami różnic skończonych i elementów skończonych przepływu nieustalonego w ujściowym odcinku rzeki Jenisej. Wodnyje Resursy No. 4, 1984 (w j. rosyjskim).
7. B. K. KANTOROWICZ, L. S. KUCZMENT: Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania nieustalonego ruchu wody wg równań Saint-Venanta. Wodnyje Resursy, No. 6, 1981.
8. J. LEGRAS: Praktyczne metody analizy numerycznej. WNT, Warszawa 1974.
9. W. A. MILLER, V. YEVJEWICH: Unsteady flow in open channels. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA 1975.
10. R. SZYMKIEWICZ: Dynamika przybrzeżnych zbiorników podlegających wpływowi morza. Zesz. Nauk Politechniki Gdańskiej nr 395, Bud. Wodne, z. XXVI, Gdańsk 1986.
11. O. ZIENKIEWICZ: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.

## A comparison of the solution effectiveness of de Saint-Venant equations with finite element method and finite difference method

### Summary

For the solution of de Saint-Venant equations the finite element method and the implicit (four points) finite difference scheme has been used. The set of algebraic equations obtained from approximation has been solved with Newton method. The accuracy of the solution of 0.05% was obtained after 2-3 iterations. Numerical experiments allows to conclude that:

- both methods have given the same accuracy
- finite difference method is about 30% faster than finite element method.