

JANUSZ KUBRAK

Warszawa

## Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania wypływu spod zasuw

### 1. Wstęp

Ocena natężenia wypływu spod zasuw należy do najstarszych zadań hydrauliki. Do chwili obecnej nie doczekało się ono satysfakcjonującego rozwiązania, o czym świadczą stale pojawiające się w literaturze światowej, nowe materiały na ten temat [1 - 8, 10 - 13].

Ogólnie metody służące do rozwiązania omawianego problemu podzielić można na doświadczalne i analityczne. Te ostatnie rozpatrują wypływ spod zasuw zwykle w układzie płaskim.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie i dyskusja wyników rozwiązania zadania płaskiego wypływu spod zasuw metodą elementów skończonych.

### 2. Równania podstawowe

Punkt wyjścia do analizy wypływu spod zasuw stanowi założenie ustalonego i bezwrotnego przepływu, nielepkiej i nieściśliwej cieczy. Pozwala to w dwuwymiarowym obszarze przepływu wykorzystać równanie Laplace'a zapisane dla funkcji potencjału:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

przy czym:

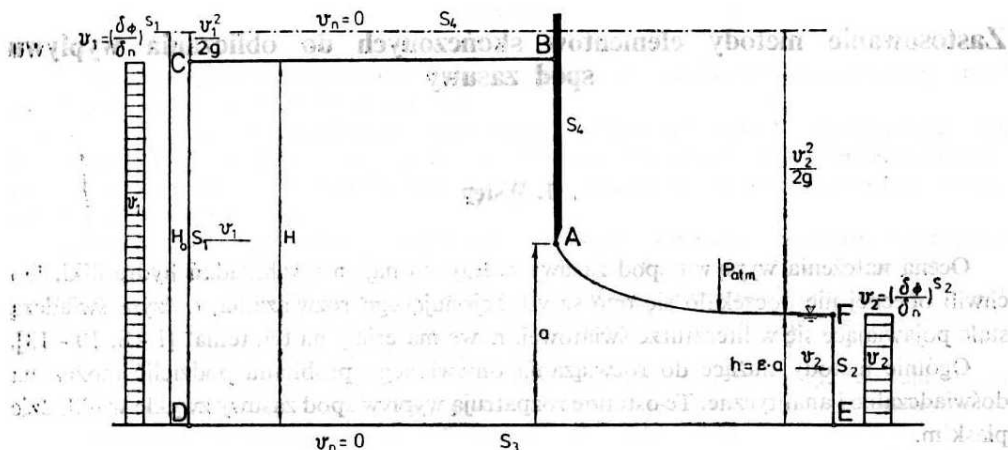
$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

oznaczają odpowiednio poziomą i pionową składową prędkości. W obszarze przepływu

obowiązuje równanie zachowania energii (rys. 1)

$$\frac{v_i^2}{2g} + \frac{p_i}{\gamma} + y_i = H_0 = \text{const}, \quad (3)$$

gdzie:  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $H_0$  – wzniesienie linii energii nad przyjętym poziomem odniesienia,  $p_i/\gamma$  – wysokość ciśnienia w punkcie  $i$ ,  $v_i$  – prędkość przepływu wody w punkcie  $i$ ,  $y_i$  – wzniesienie punktu  $i$  nad poziomym dnem.



Rys. 1. Schemat przepływu spodu zasowy dostosowany do analizy metodą elementów skończonych

Dla pokazanego na rys. 1 obszaru przepływu, będącego obszarem poszukiwań rozwiązania równania (1), zadawane są następujące warunki brzegowe:

– w przekroju wejściowym  $S_1$ :  $v_1 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^{S_1} = \text{const}$

– w przekroju wyjściowym  $S_2$ :  $v_2 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^{S_2} = \text{const}$

– na brzegach nieprzepuszczalnych:  $S_3, S_4: v_n = 0$

– na śladzie powierzchni swobodnego zwierciadła zwanego dalej linią swobodnej powierzchni  $S_5$ :  $v_n = 0, p = p_{\text{atm}}$ ,

gdzie:  $n$  – kierunek normalny do linii  $S$  ograniczającej obszar przepływu  $V$ ,  $v_1, v_2, v_n$  – prędkości w kierunku normalnym do granic obszaru,  $p$  – wartość ciśnienia,  $p_{\text{atm}}$  – ciśnienie atmosferyczne.

Nie poszukiwano bezpośrednich rozwiązań równania (1) w obszarze przepływu, lecz wykorzystano rachunek wariacyjny do znalezienia matematycznie równoważnego równania całkowego, zwanego funkcjonalem, którego argument stanowi funkcja potencjału.

Równoważny równaniu (1) funkcjonal ma postać:

$$I(\Phi) = \frac{\rho}{2} \iint_V \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \rho \oint_S \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds, \quad (4)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość wody.

Rozwiązanie równania (1) wewnątrz obszaru przepływu zostało sprowadzone więc do znalezienia funkcji potencjału, dla której funkcjonal (4) osiąga minimum [14]. Funkcjonał (4) można interpretować w różny sposób [2, 3, 4]. Matematycznie – jest sformułowaniem wariacyjnym równoważnym równaniu (1) dla określonej z warunku brzegowego pochodnej normalnej. Fizycznie, pierwszy składnik funkcjonału przedstawia energię kinetyczną strumienia cieczy zawartą w obszarze  $V$ . Drugi składnik funkcjonału, będący całką krzywoliniową, określa pracę wykonywaną przy przechodzeniu cieczy ze stanu spoczynku do płynięcia, wskutek zmian ciśnienia na granicach obszaru. Energia strumienia nielepkiej cieczy przechodzącego przez ograniczenie  $S_1$  i wychodzącego przez  $S_2$  jest stała (rys. 1):

$$H_0 = \frac{v_1^2}{2g} + H = \frac{v_2^2}{2g} + h. \quad (5)$$

Stosując równanie ciągłości dla płaskiego przepływu:

$$Hv_1 = hv_2 \quad (6)$$

wyznaczyć można prędkość dopływającej wody w przekroju  $S_1$

$$v_2 = H \sqrt{\frac{2g}{H+h}} \quad (7)$$

(E1)

Stosunek napełnienia w przekroju  $S_2$  do wielkości otwarcia zasuwy  $a$  zdefiniowano jako współczynnik kontrakcji  $\varepsilon$  [8]:

$$\varepsilon = \frac{h}{a}. \quad (8)$$

Jednostkowe natężenie przepływu przy niezatopionym wypływie spod zasuwy wyrazić można m.in. w postaci [8]:

$$q = \mu a \sqrt{2gH}, \quad (9)$$

gdzie:  $\mu$  – bezwymiarowy współczynnik wydatku.

Z porównania zależności (9) określającej natężenie przepływu i wynikającej z równania ciągłości płaskiego przepływu otrzymano:

$$q = v_2 \varepsilon a = \mu a \sqrt{2gH} \quad (10)$$

skąd po przekształceniach wyznaczono współczynnik wydatku:

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon \frac{a}{H}}} \quad (11)$$

### 3. Zastosowanie metody elementów skończonych

Do minimalizacji funkcjonału (4) wykorzystano postępowanie Rayleigha-Ritza [14]. Obszar przepływu (całkowania)  $V$  ograniczony linią  $S$ , na której określona jest prostopadła składowa prędkości  $\partial\Phi/\partial n$  dzielony jest na  $M$  podobszarów – elementów. Poszukiwaną funkcję  $\Phi$  wewnątrz każdego  $k$  węzłowego elementu  $e$  aproksymuje się następująco:

$$\{\Phi\} = [N_i, N_j, \dots, N_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \vdots \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = [N] \{\Phi\}^e \quad (12)$$

gdzie:  $[N_i, N_j, \dots, N_k]$  są funkcjami kształtu, uzależnionymi jedynie od współrzędnych

elementu, a  $\begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \vdots \\ \Phi_k \end{Bmatrix}$  wektorem wartości funkcji w węzłach elementu  $e$ .

Minimalizacji funkcjonału  $I(\Phi)$  względem wszystkich wartości poszukiwanej funkcji  $\Phi_i, \Phi_j, \dots, \Phi_m$  występujących w całym obszarze można według Ritza [14] dokonać przez przyrównanie do zera pochodnych funkcjonału (4) względem niewiadomych:

$$\frac{\partial I(\Phi)}{\partial \{\Phi\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial I(\Phi)}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial I(\Phi)}{\partial \Phi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial I(\Phi)}{\partial \Phi_n} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

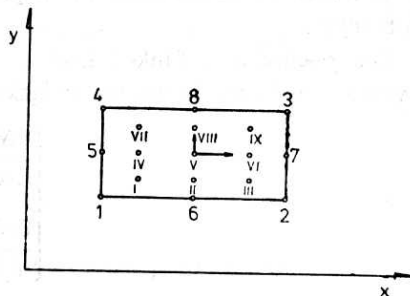
Typowe równanie  $\partial I(\Phi)/\partial \Phi_i$  otrzymuje się po zróżniczkowaniu względem wartości funkcji  $\Phi_i$  w węźle  $i$  elementu  $e$ :

$$\frac{\partial I(\Phi)^e}{\partial \Phi_i} = \rho \iint_{V^e} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] dx dy - \rho \oint_{S^e} N_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds \quad (14)$$

i po uwzględnieniu związku (12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\Phi)^e}{\partial \Phi_i} = \rho \iint_{V^e} \left[ \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \dots + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \Phi_j + \dots + \frac{\partial N_k}{\partial y} \Phi_k \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dx dy - \rho \oint_{S^e} N_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Za podstawową jednostkę podziału obszaru przepływu przyjęto ośmiowęzłowy czworokątny element izoparametryczny (rys. 2) [14]. Taki typ elementu umożliwia wykorzystanie kwadratowej funkcji kształtu do opisu zmian funkcji potencjału w elemencie, co zapewnia zachowanie liniowych zmian składowych prędkości pomiędzy sąsiednimi węzłami elementu zgodnie z równaniem (2) oraz między elementami i pozwala na dokładniejszą aproksymację brzegu w obszarze rozwiązania.



Rys. 2. Przyjęty typ elementów izoparametrycznych z zaznaczonym lokalnym układem współrzędnych i punktami Gaussa

Funkcje kształtu dla ośmiowęzłowego elementu czworokątnego podane są we współrzędnych znormalizowanych, co wymaga ich transformacji na współrzędne globalne [14].

Przyjęte w układzie lokalnym  $(\xi, \eta)$  funkcje kształtu dla numeracji węzłów jak na rys. 2 są następujące:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)
 \end{aligned} \tag{16}$$

Przy zadanym typie elementu i funkcjach kształtu obliczać można współczynniki równania (15) dla wszystkich niewiadomych  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  występujących w elemencie. Powstały układ równań można zapisać macierzowo:

$$\frac{\partial I(\Phi)^e}{\partial \{\Phi\}^e} = [\mathbf{k}]^e \{\Phi\}^e - \{\mathbf{Q}\}^e = 0, \tag{17}$$

gdzie:

$$[\mathbf{k}]^e = \rho \iint_{v^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \tag{18}$$

$$\{\mathbf{Q}\}^e = -\rho \oint_{s^e} N_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^{s^e} ds \tag{19}$$

$i, j = 1, \dots, k$ .

Istotną wadę elementu typu izoparametrycznego stanowią trudności rachunkowe związane z obliczaniem macierzy  $[k]^e$  i wektora  $\{Q\}^e$ , ponieważ ich elementy zależą od funkcji kształtu  $N_i(\xi, \eta)$  i jej pochodnych wyrażonych we współrzędnych globalnych. Niezbędne są dwie transformacje:

- funkcji kształtu i jej pochodnych zdefiniowanych we współrzędnych lokalnych na wartości w układzie globalnym,
- powierzchni całkowania we współrzędnych lokalnych na powierzchnię w układzie globalnym.

Dla pochodnych funkcji kształtu zdefiniowanych we współrzędnych lokalnych stosowano transformację według związku wynikającego z reguł różniczkowania:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

gdzie macierz  $[J]^{-1}$  jest odwróconą macierzą Jakobiego, która ma postać:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Do transformacji powierzchni, po której odbywa się całkowanie, stosowano standardowy proces, polegający na określaniu wyznacznika macierzy  $[J]$ :

$$dx dy = \det [J] d\xi d\eta. \quad (22)$$

Do obliczania składników równania (18) zastosowano całkowanie numeryczne Gaussa [9, 14]. Dla elementu wzorcowego (rys. 2) całki w równaniu (12) obliczano ze wzoru:

$$I_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_1^m \sum_1^m a_k a_l \Phi(\xi_k, \eta_l), \quad (23)$$

gdzie:  $a_k, a_l$  — parametry wagowe,  $\xi_k, \eta_l$  — współrzędne punktów Gaussa,  $m$  — liczba punktów Gaussa stosowana w całkowaniu w jednym kierunku.

Wystarczająco dokładne obliczenia składników równania (18) zapewnia wg [9] przyjęcie 3 punktów Gaussa dla każdego kierunku (rys. 2). Całkę z równania (18) na  $k_i$  obliczano następująco:

$$\iint_{V^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dy = \sum_1^3 \sum_1^3 a_k a_l \frac{\partial N_i(\xi_k, \eta_l)}{\partial x} \frac{\partial N_i(\xi_k, \eta_l)}{\partial x} \det [J(\xi_k, \eta_l)], \quad (24)$$

gdzie:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}(\xi_k, \eta_l)$$

jest wartością pochodnych funkcji kształtu w punkcie Gaussa o współrzędnych  $(\xi_k, \eta_l)$ .

Specyfika numerycznego całkowania metodą elementów skończonych stwarza pewne trudności w obliczaniu wartości składowych prędkości w węzłach elementu. Obecny stan wiedzy w tej dziedzinie nie określa jednoznacznego rozwiązania omawianego problemu. ZIENKIEWICZ [14] postuluje różne sposoby postępowania. Zdecydowano się po obliczeniu wartości składowych prędkości w punktach Gaussa przejść do wartości w węzłach elementów za pomocą liniowej interpolacji, a następnie obliczać wartość średnią arytmetyczną dla węzłów wspólnych dla kilku elementów.

Składowe prędkości jako pochodne funkcji  $\Phi_i$  wyznaczano ze związków:

$$v_x = \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i, \quad (25)$$

$$v_y = \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} \Phi_i. \quad (26)$$

Pochodne globalne  $\partial N_i/\partial x$ ,  $\partial N_i/\partial y$  obliczano z równania (20) w punktach Gaussa.

#### 4. Budowa globalnego układu równań

Całkowity funkcjonal jest sumą składników pochodzących od poszczególnych elementów:

$$I(\Phi) = \sum_1^M I(\Phi)^e. \quad (27)$$

Dla całego obszaru  $V$  równanie (17) ma postać:

$$\frac{\partial I(\Phi)}{\partial \{\Phi\}} = \sum_1^M \{[\mathbf{K}]^e \{\Phi\}^e - \{\mathbf{Q}\}^e\} = 0 \quad (28)$$

i ostatecznie:

$$[\mathbf{K}] \{\Phi\} = \{\mathbf{Q}\}. \quad (29)$$

Macierz  $[\mathbf{K}]$  jest symetryczna i wstęgowa, co w obliczeniach pozwala zredukować jej wymiary. Szerokość wstęgi stanowi powiększona o jedność największa różnica numerów węzłów w elemencie (wybrana z całego obszaru). Układ (29) jest liniowy i symetryczny o liczbie równań równej liczbie węzłów. Do jego rozwiązania wykorzystano procedurę eliminacji Gaussa [14]. Rozwiązaniem układu są wartości funkcji potencjału w węzłach, według których oblicza się składowe prędkości z równań (25), (26).

#### 5. Wprowadzenie warunków brzegowych

W pokazanym na rys. 1 obszarze przepływu brzeg  $S_1$  i  $S_2$  można traktować jako brzegowe linie jednakowego potencjału, wtedy  $\Phi = \text{const}$ . Taka forma warunku brzegowego została wprowadzona do układu (29).

Warunek  $\partial\Phi/\partial n$  obliczany jest dla wszystkich elementów jednakże całka (19) przyjmuje wartości różne od zera jedynie w tych elementach, których węzły leżą na granicy obszaru przepływu  $S_1$   $S_2$  i tylko ich udział uwzględniony jest w globalnej macierzy  $\{Q\}$ . Na nieprzepuszczalnych brzegach i na swobodnej powierzchni, prędkość normalna  $v_n$  przyjmuje wartość zero ( $\partial\Phi/\partial n=0$ ). Wektor  $\{Q\}^e$  czworokątnego elementu, którego bok leży w przekroju wejściowym  $S_1$  ma postać [14]:

$$\{Q\}^e = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} -vl \\ 0 \\ 0 \\ vl \\ -4vl \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

gdzie:  $l$  – długość boku elementu pokrywającego się z przekrojem  $S_1$ .

## 6. Obliczanie położenia swobodnej powierzchni

Do obliczeń swobodnej powierzchni przy wypływie spod zasuw wykorzystano algorytm sformułowany przez DIERSCHA [4]. Pierwszym krokiem w rozwiązaniach zadań przepływu ze swobodną powierzchnią jest założenie jej położenia, które następnie będzie poprawiane, aż do momentu spełnienia wymienionych w punkcie 2 warunków brzegowych.

Prędkość w dowolnym punkcie  $i$  na swobodnej powierzchni obliczano z równania Bernoulliego (5) wykorzystując znaną wartość prędkości  $v_2$  w przekroju wyjściowym  $S_2$  dla założonego wzniesienia linii energii  $H_0$  i założonego położenia linii zwierciadła wody  $y_2 = h$

$$\frac{v_i^2}{2g} + y_i = \frac{v_2^2}{2g} + y_2 \quad (31)$$

( $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$ ). Dla przyjętego liniowego rozkładu prędkości między węzłami na swobodnej powierzchni (patrz pkt 3) zachodzi (rys. 3):

$$v(s) = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta s} s + v_i, \quad (32)$$

gdzie  $\Delta s$  jest odległością między narożnymi węzłami w elemencie. Korzystając z warunku, że prędkość  $v$  w punktach swobodnej powierzchni można wyrazić również jak prędkość w kierunku stycznym do zewnętrznej linii prądu tzn.:

$$v(s) = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \quad (33)$$



po uwzględnieniu zależności (32) otrzymano:

$$v(s) = v_i s + \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{2\Delta s} s^2 + U, \quad (34)$$

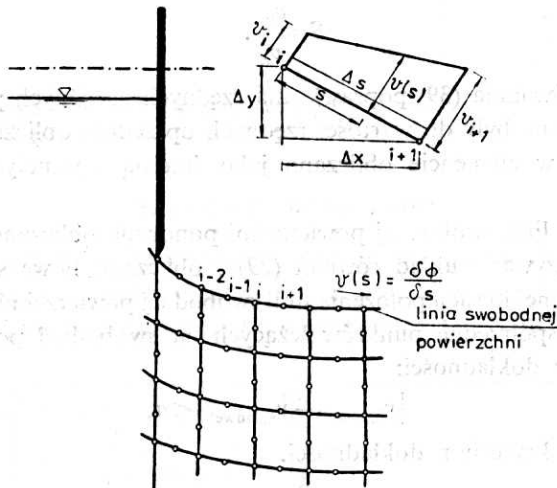
gdzie:  $U$  – stała całkowania wyznaczona z warunków

$$\Phi|_{s=0} = \Phi_i \quad \text{i} \quad \Phi|_{s=\Delta s} = \Phi_{i+1}.$$

Ostatecznie otrzymano zależność do obliczania wartości funkcji potencjału w węzłach na swobodnej powierzchni:

$$\Phi_i = \Phi_{i+1} - \frac{(v_i + v_{i+1})}{2} \Delta s. \quad (35)$$

Z równania (35) obliczać można wartości  $\Phi_i$  dla węzłów leżących na swobodnej powierzchni, zaczynając od założonej wartości potencjału na brzegowej linii potencjału w przekroju wyjściowym  $S_2$ . Obliczone w ten sposób wartości potencjału wprowadzane były do układu (29).



Rys. 3. Liniowy rozkład prędkości między węzłami na swobodnej powierzchni

Spełnienie drugiego warunku – zerowej wartości składowej prędkości w kierunku normalnym do swobodnej powierzchni ( $v_n = 0$ ) – umożliwia wraz z obliczonymi składowymi prędkościami podanie zależności na wielkość poprawek rzędnych węzłów leżących na swobodnej powierzchni.

Przebieg linii zwierciadła wody między skrajnymi punktami w elemencie opisano wielomianem trzeciego stopnia (rys. 3):

$$y(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad (36)$$

gdzie  $x, y$  oznaczają odpowiednio odcięte i rzędne punktów na swobodnej powierzchni.

Lokalny spadek zwierciadła wody oblicza się po zróżniczkowaniu równania (36):

$$S(x) = y'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C. \quad (37)$$

Współczynniki  $A$ ,  $B$ ,  $C$  wyznacza się z warunków:

$$\begin{aligned} x=0 \quad S_i &= C \\ x = \frac{\Delta x_i}{2} \rightarrow S_{i+1} &= 3A \frac{\Delta x_i^2}{4} + 2B \frac{\Delta x_i}{2} + C \end{aligned} \quad (38)$$

$$x = \Delta x_i \rightarrow S_{i+2} = 3A \Delta x_i^2 + 2B \Delta x_i + C.$$

Z równań (38) wyznaczyć można współczynniki  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , które ponownie wprowadzone do równania (37) pozwalają wyrazić różnicę skrajnych rzędnych węzłów w elemencie w postaci:

$$\Delta y_i = (S_i + 4S_{i+1} + S_{i+2}) \frac{\Delta x_i}{6}, \quad (39)$$

gdzie  $S_i$ ,  $S_{i+1}$ ,  $S_{i+2}$  oznaczają lokalne spadki linii swobodnej powierzchni obliczane przy użyciu składowych prędkości:

$$S = \frac{v_y}{v_x}. \quad (40)$$

Wyznaczone z równania (39) poprawki dla rzędnych narożnych punktów węzłowych w elemencie odnoszone były do wartości rzędnych uprzednio obliczonych. Współrzędne węzłów pośrednich w elemencie obliczano jako średnią arytmetyczną współrzędnych węzłów narożnych.

Dla poprawienia linii swobodnej powierzchni ponownie obliczano warunek ciśnienia  $p = p_{atm}$  (35), rozwiązywano układ równań (29) i obliczano nowe składowe prędkości, które służyły do kolejnej iteracji położenia linii swobodnej powierzchni. Iterację prowadzono tak długo, aż współrzędne punktów leżących na swobodnej powierzchni spełniały narzucone kryterium dokładności:

$$|y_{i, \text{stare}} - y_{i, \text{nowe}}| < a, \quad (41)$$

gdzie:  $a$  – przyjęte kryterium dokładności.

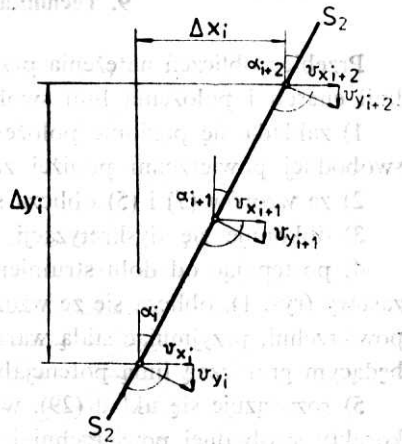
## 7. Numeryczna kontrola granicy jednakowego potencjału

W toku iteracyjnego poprawiania współrzędnych węzłów leżących na linii swobodnej powierzchni, graniczna linia potencjału ( $S_2$ ) nie może przybierać dowolnego kształtu i powinna spełniać warunek ortogonalności z nowo obliczoną linią swobodnej powierzchni (rys. 4). Konieczna staje się więc korekta jej położenia w taki sposób, aby warunek  $\Phi = \text{const}$  lub  $v_n = v_2$  (prędkość wody w przekroju wyjściowym  $S_2$  równa składowej normalnej do granicy) był spełniony po każdej iteracji położenia swobodnej powierzchni. Znajomość lokalnych spadków w węzłach wzdłuż brzegowej linii potencjału pozwala wyprowadzić zależność, jak dla rzędnych węzłów leżących na swobodnej powierzchni, umożliwiającą przeprowadzenie korekty jej położenia, przy założeniu, że zmienność odciętych punktów  $x$ ,

będzie przedstawiona w elemencie wielomianem trzeciego stopnia w funkcji rzędnych  $y$ :

$$\Delta x_i = (S_i + 4S_{i+1} + S_{i+2}) \frac{\Delta y_i}{6} \quad (42)$$

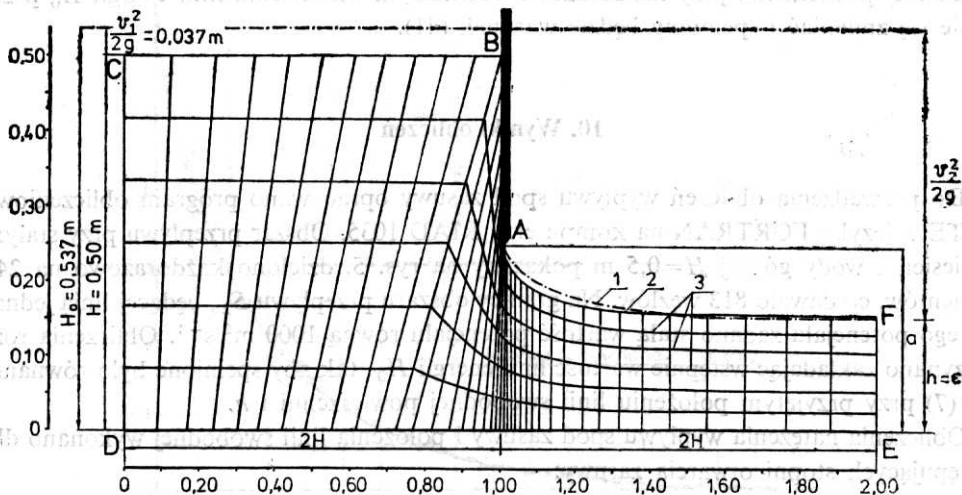
Współrzędne węzłów wzdłuż linii jednakowego potencjału poprawia się kolejno od dołu do góry, zaczynając od węzła na korpusie przelewu (punkt obrysu), przy czym  $\Delta y_i$  są wartościami, które obliczono w toku korekty swobodnej powierzchni i wewnętrznych linii prądu (patrz pkt 8).



Rys. 4. Korekta położenia granicznej linii jednakowego potencjału

### 8. Ruchoma sieć elementów

W obliczeniach położenia linii swobodnej powierzchni uwzględnić trzeba, że kolejne poprawianie jej przyjętego, niedoskonałego przybliżenia doprowadzić może do znacznego zniekształcenia lub nawet nałożenia się sieci elementów. DIERSCH [4] rozwiązał ten pro-



Rys. 5. Schemat podziału obszaru przepływu na czworokątne elementy

1 – założone położenie linii swobodnej powierzchni, 2 – obliczone położenie linii swobodnej powierzchni, 3 – obliczone położenia wewnętrznych linii prądu

blem stosując czworokątną formę siatki i dostosowując jej kształt do każdorazowej linii swobodnej powierzchni, przez znalezienie z warunku  $v_n=0$  (39) odpowiedniego, nowego położenia wewnętrznych, przeciwległych boków czworokątnych elementów w zależności od zmian położenia linii swobodnej powierzchni. Obliczone w ten sposób z zależności (39) rzędne węzłów boków przeciwległych do linii swobodnej powierzchni tworzą linie ilustrujące przebieg linii prądu wewnątrz obszaru przepływu (linie 3 na rys. 5).

### 9. Technika obliczeń wypływu spod zasady

Przebieg obliczeń natężenia przepływu wypływającej spod zasady cieczy, wzniesienia linii energii i położenia linii swobodnej powierzchni są następujące:

- 1) zakłada się poziome położenie zwierciadła wody górnej i kształt położenia linii swobodnej powierzchni poniżej zasady,
- 2) ze wzorów (7) i (5) oblicza się wzniesienie linii energii  $H_0$ ,
- 3) dokonuje się dyskretyzacji obszaru przepływu,
- 4) postępując od dołu strumienia (punkt  $F$ ) do punktu  $A$  położonego na krawędzi zasady (rys. 1), oblicza się ze wzoru (35) warunek stałego ciśnienia na linii swobodnej powierzchni, przyjmując stałą wartość potencjału, np.  $\Phi=1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  w przekroju  $S_2$  będącym graniczną linią potencjału,
- 5) rozwiązuje się układ (29), wyznacza składowe prędkości (25), (26) i dokonuje się korekty swobodnej powierzchni i wewnętrznych linii prądu, zaczynając od punktu  $A$ ,
- 6) przeprowadza się korektę położenia granicy jednakowego potencjału  $S_2$  wg (42),
- 7) ponownie oblicza się nowe wzniesienie linii energii  $H_0$  ze wzorów (7) i (8), w których  $h$  oznacza wzniesienie punktu  $F$  swobodnej powierzchni w przekroju  $S_2$  nad dnem, po dokonaniu uprzednio korekty położenia linii swobodnej powierzchni,
- 8) obliczenia wg punktów 3 - 7 prowadzi się ponownie do chwili, gdy położenie linii swobodnej powierzchni przy każdorazowo obliczanym wzniesieniu linii energii  $H_0$  przestanie się zmieniać i spełniony będzie warunek (41).

### 10. Wyniki obliczeń

Do prowadzenia obliczeń wypływu spod zasady opracowano program obliczeniowy GATE w języku FORTRAN na komputerze RIAD 1035. Obszar przepływu przy stałym wzniesieniu wody górnej  $H=0,5 \text{ m}$  pokazany na rys. 5, dzielono każdorazowo na 240 elementów, co dawało 813 węzłów. Na granicy obszaru przepływu  $S_2$ , będącej linią jednakowego potencjału zadano stałą wartość potencjału równą  $1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Obliczenia rozpoczynano zakładając wstępnie wartość linii energii  $H_0$ , tak aby spełnione było równanie (5), (7) przy przyjętym położeniu linii swobodnej powierzchni i  $h$ .

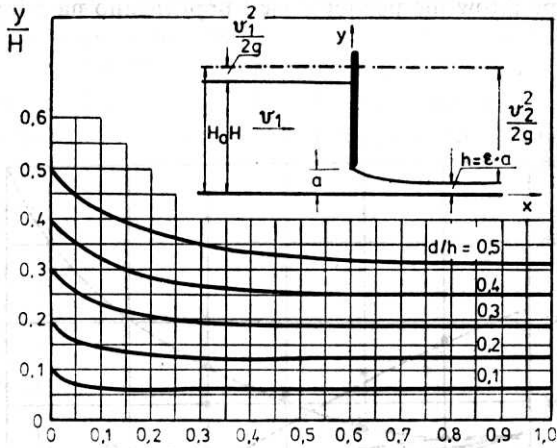
Obliczenia natężenia wypływu spod zasady i położenia linii swobodnej wykonano dla następujących stopni otwarcia zasady:

$$\frac{a}{H} = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.$$

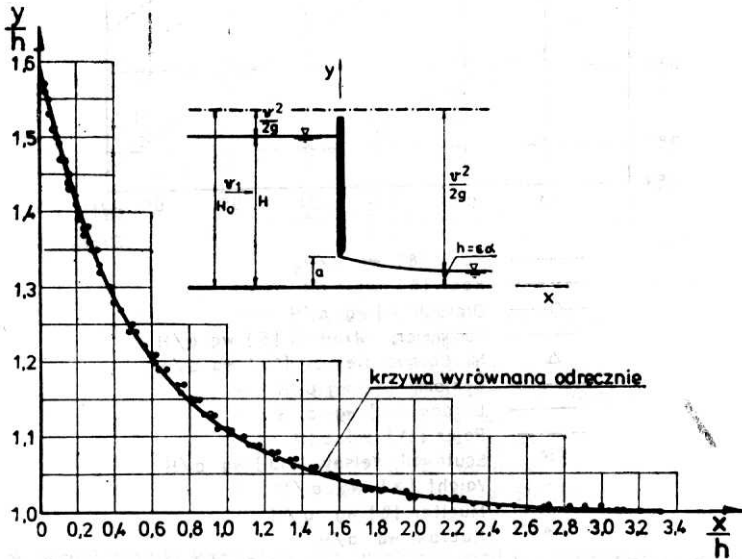
Tablica 1

Obliczone charakterystyki hydrauliczne wypływu spod zasowy przy różnych stopniach jej otwarcia

$a$ [m]	$\frac{a}{H}$	$H_0$ [m]	$v_1$ [ms <sup>-1</sup> ]	$h$ [m]	$\epsilon$	$\mu$	Liczba iteracji	Czas obliczeń
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,05	0,1	0,5019	0,1923	0,0317	0,634	0,615	7	22 min. 39s
0,10	0,2	0,5070	0,3699	0,0626	0,626	0,590	14	44 min. 11s
0,15	0,3	0,5147	0,5364	0,0933	0,622	0,571	9	40 min. 47s
0,20	0,4	0,5247	0,6961	0,1242	0,621	0,556	11	37 min. 22s
0,25	0,5	0,5366	0,8476	0,1549	0,620	0,542	8	30 min. 11s



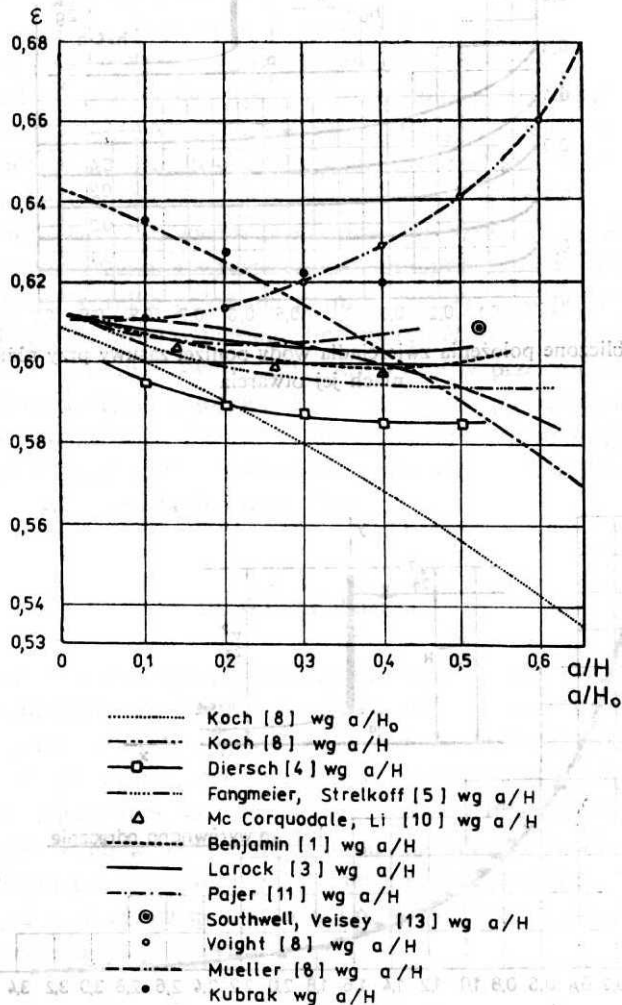
Rys. 6. Obliczone położenia zwierciadła wody poniżej zasowy przy różnych stopniach jej otwarcia



Rys. 7. Linie swobodnej powierzchni w układzie  $(x/h, y/h)$

Obliczone charakterystyki hydrauliczne oraz czasy obliczeń zadania na emc RIAD 1035 zestawiono w tablicy 1. Na rys. 5 pokazano założone i obliczone położenie linii swobodnej powierzchni oraz wzniesienie linii energii dla  $a/H=0,5$ . Wyniki obliczeń położenia linii swobodnej powierzchni przy różnych stopniach otwarcia zasuw pokazano na rys. 6.

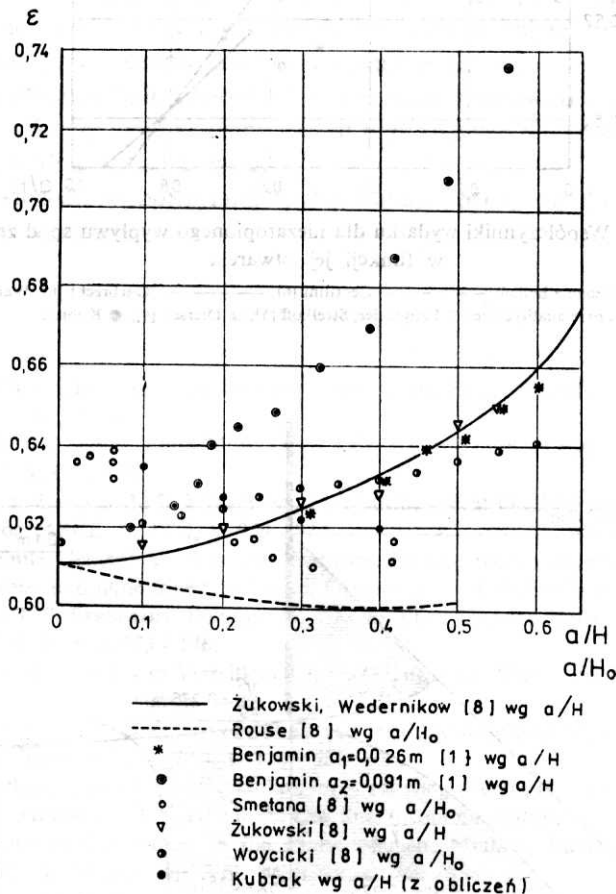
Obliczone krzywe linii swobodnej powierzchni przy różnych stopniach otwarcia zasuw przedstawiono na rys. 7 w układzie  $y/h$  i  $x/h$ . Jak wynika z rys. 7 kształt linii swobodnej powierzchni, w przyjętych współrzędnych bezwymiarowych jest niezależny od stopnia otwarcia zasuw. Próby znalezienia równania regresji funkcji elementarnej, wyrównującego powstały zbiór punktów nie powiodły się i porzeczono na odrębnym jego wyrównaniu.



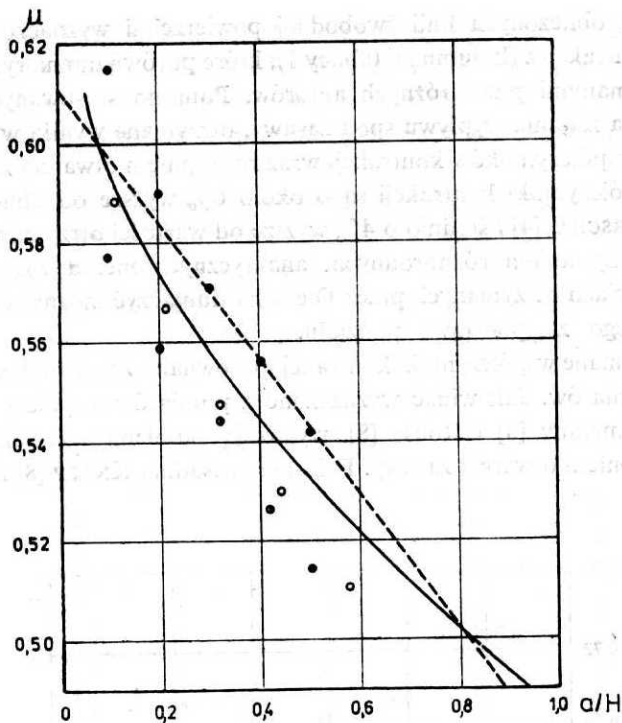
Rys. 8. Współczynniki kontrakcji przy wypływie spod pionowej zasuw obliczone metodą analityczną

Na podstawie obliczonych linii swobodnej powierzchni wyznaczono ze wzoru (8) współczynniki kontrakcji  $\varepsilon$  (kolumna 6 tablicy 1), które porównano na rys. 8 z wartościami z obliczeń otrzymanymi przez różnych autorów. Pomimo stosowanych różnorodnych metod rozwiązania zadania wypływu spod zasuwy, otrzymane wyniki wykazują podobną tendencję zmian współczynników kontrakcji wraz ze stopniem otwarcia zasuwy. Obliczone przez autora współczynniki kontrakcji są o około 6% wyższe od obliczonych tą samą metodą przez DIERSCHA [4] i średnio o 4% wyższe od wartości otrzymanych przez innych autorów z wykorzystaniem różnorodnych, analitycznych metod rozwiązania zadania. Różnice w wartościach otrzymanych przez Dierscha tłumaczyć można odmiennością typu elementu przyjętego za podstawę podziału.

Na rys. 9 otrzymane współczynniki kontrakcji porównano z wartościami wyznaczonymi na podstawie pomiarów. Jak widać wyznaczone z pomiarów współczynniki kontrakcji, poza wynikami Smetany [8] i Rouse [8], wykazują odmienny charakter zmian, gdyż rosną wraz ze stopniem otwarcia zasuwy. Fakt ten uzasadnia KNAPP [8] zbyt małą „ostro-

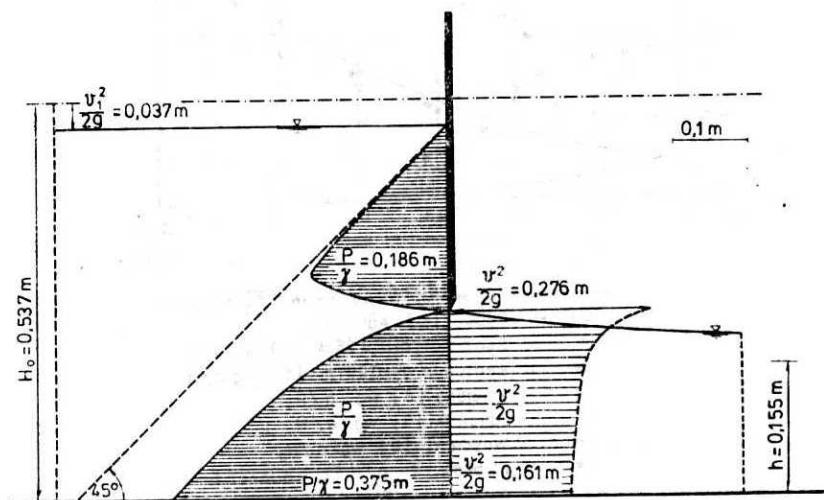


Rys. 9. Współczynniki kontrakcji przy wypływie spod pionowej zasuwy wyznaczone na podstawie eksperymentu



Rys. 10. Współczynniki wydanku dla niezatopionego wypływu spod zasuw w funkcji jej otwarcia

Wartości wyznaczone z badań: - - - - - Gentilini [6], ————— Garbrecht [6]. Wartości obliczone analitycznie: ○ Fangmeier, Strelkoff [5], ○ Diersch [4], ● Kubrak



Rys. 11. Rozkład ciśnienia w przekroju zasuw oraz wysokości prędkości w przekroju pod zasuwą dla  $a/H=0,5$



ścią" spodniej krawędzi badanego modelu zasuw. Wyznaczone współczynniki kontrakcji stosunkowo dobrze zgadzają się z wartościami uzyskanymi przez Smetaną.

Obliczone wg wzoru (11) współczynniki wydatku (kolumna 7 tablicy 1) porównano na rys. 10 z wartościami wyznaczonymi na podstawie pomiarów i analiz teoretycznych innych badaczy. Największe i wynoszące około 6% różnice występują pomiędzy wartościami obliczonymi przez Dierscha. Współczynniki wydatku uzyskane przez autora są zgodne z wyznaczonymi na podstawie pomiarów przez Gentilinię [6] i Garbrechta [6]. Na rys. 11 pokazano rozkład wysokości ciśnienia  $p/\gamma$  w przekroju zasuw oraz wysokości prędkości  $v^2/2g$  dla  $a/H=0,5$ .

## 12. Wnioski

1. Przedstawione rozwiązanie zadania wypływu spod zasuw metodą elementów skończonych, przy założeniu potencjalnego przepływu dostarcza licznych informacji o wartościach ciśnienia, składowych prędkości, natężenia przepływu i układzie linii swobodnej powierzchni przy różnych stopniach otwarcia zasuw.

2. Uzyskane z obliczeń linie swobodnej powierzchni sprowadzone do współrzędnych bezwymiarowych  $(x/h, y/h)$  mają zbliżony kształt przy różnych otwarczeniach zasuw i układają się wyraźnie wzdłuż jednej krzywej.

3. Obliczone wartości współczynników kontrakcji różnią się 3-4% od wartości obliczonych innymi metodami.

## LITERATURA

1. T. B. BENJAMIN, On the Flow in Channels when Rigid Obstacles are Placed in the Stream. *J. Fluid Mechanics* No. 1, July, 1956.
2. S. T. K. CHAN, B. E. LAROCK, Fluid Flows from Axisymmetric Orifices and Valves, *J. Hydr. Div. Proc. ASCE*, 1, 1973, s. 81 - 97.
3. S. T. K. CHAN, B. E. LAROCK, L. R. HERRMANN, Free-Surface Ideal Fluid Flows by Finite Elements, *J. Hydr. Div. Proc. ASCE*, 6, 1973, s. 959 - 974.
4. H. J. DIERSCH, Finite-Element-Analysis zweidimensionaler und rotationssymmetrischer Potentialströmungen mit freier und ohne freie Oberfläche, Dysertacja, Technische Universität Drezno, 1976.
5. D. D. FANGMEIER, T. S. STRELKOFF, Solution for Gravity Flow Under a Sluice Gate, *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 1, 1968, s. 153 - 176.
6. W. H. HAGER, Die Hydrologie von Verteilkanälen Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, Zürich, 1982.
7. H. R. HENRY, Discussion of "Diffusion of Submerged Jets", by Albertson M. L., Dai Y. B., Jensen R. A., Rouse H. *Trans. ASCE*, 1950, s. 115 - 687.
8. F. H. KNAPP, Ausfluss, Überfall und Durchfluss im Wasserbau. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1960.
9. J. M. LEONE, P. M. GRESHO, S. T. CHAN, R. L. LEE, Short Communications - A Note on the accuracy of Gauss-Legendre Quadrature in the Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, s. 769 - 784.
10. J. A. McCORQUODAL, C. Y. LI, Finite Element Analysis of Sluice Gate Flow. *Trans. ASCE*, 1971, s. 650 - 686.
11. G. PAJER, Über den Strömungsvorgang an einer unterströmten Scharfkantigen Planschütze. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 17, 1937, s. 259 - 269.

12. B. PERRY, Methods for Calculating the Effect of Gravity on Two-Dimensional Free Surface Flows. Dysertacja, Stanford University, Calif., 1957.
13. R. V. SOUTHWELL, G. VAISEY, Relaxation Methods Applied to Engineering Problems. XII Fluid Motions Characterized by Free Streamlines. Phil. Trans. Roy. Soc., London Ser. A, Vol. 240, 1946.
14. O. C. ZIENKIEWICZ, The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London, 1977.

## Применение метода конечных элементов для расчёта истечения из-под затвора

### Содержание

В статье содержатся результаты расчётов свободного истечения из-под затвора, полученные по модели, разработанной Дьершем. Предмет анализа — двумерный, безвихревой расход однородной, несжимаемой и невязкой жидкости. Принятие таких допущений сводит задачу определения свободного истечения из-под затвора к решению в определённой области Лапласового уравнения (1) относительно функции потенциала скорости с крайевыми условиями Коши. В результате применения метода конечных элементов была получена симметрическая система линейных уравнений, которая решается относительно неизвестной функции потенциала  $\Phi$ , в узлах сетки.

Более сложная задача получается при расчётах расхода потоков со свободной поверхностью. В этом случае на границах области следует применять нелинейные крайевые условия, поскольку отметка свободной поверхности пропускаемого затвора заранее неизвестна.

Предлагается следующий порядок расчётов:

1. Задаётся расположение линии свободной поверхности воды над- и ниже затвора.
2. По уравнениям (7) и (5) определяется величина энергии  $H_0$ .
3. Вводится разделение расчётной области на конечные элементы.
4. По уравнению (35) вычитываются величины функции потенциала скорости  $\Phi$ , в узлах, расположенных на уровне свободной поверхности воды, начиная с узла  $A$  (рис. 1).
5. Решается система уравнений (29), по уравнениям (25, 26) вычисляются составляющие скоростей и вычисляется положение свободной поверхности.
6. Ведётся численный контроль линии одинакового потенциала скорости  $S_2$  по уравнению (42).
7. Корректируется величину энергии  $H_0$  по уравнениям (7) и (5).
8. Если положение свободной поверхности устойчивое и выполняет условие (41), тогда величина  $H_0$  считается достаточно точной.

В другом случае, вычисления по пунктам 3-7 надо повторить.

Представлено практическое применение процедуры для  $a/H=0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$ .

В каждом случае расчётная область была разделена на 240 четырёхугольных элементов. Вычисленные линии свободной поверхности показаны на рис. 6, 7.

Вычисленные коэффициенты сжатия с величинами других авторов показаны на рис. 8 и 9. Коэффициенты расхода, вычисленные и определённые на основе лабораторных исследований, показаны на рис. 10.

## The results of computation of the flow under vertical sluice gates

### Summary

Results of calculation of flow under vertical sluice gates obtained by the use of the finite element method are presented. Stationary two-dimensional and axisymmetric irrotational flows of a homogeneous inviscid and incompressible fluid are considered. With the velocity potential function  $\Phi$  as the primary

unknown, the solution is reduced to the Laplace equation (1) under Cauchy boundary conditions. As a result of the finite element approximation, a linear, symmetric and banded system of equations is obtained and give after solving the nodal values  $\Phi_i$  of the velocity potential function. Free surface flows of fluids lead to non-linear boundary value problem, since the surface profile is initially unknown.

The practical solutions of flows under vertical sluice gates is realised in following steps:

1. Assumption of the horizontal free-surface location far upstream and initial free surface location far downstream.
2. Calculation of the total head  $H_0$  from equations (7) and (5).
3. Finite element discretization by 240 eight node quadrilateral isoparametric elements of the basic flow-field.
4. Calculation of the  $\Phi_i$  values for nodes along the free surface according (35) beginning with the constant value  $\Phi = 1000 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  at the downstream boundary  $S_2$  (Fig. 1) and ending at point  $A$ .
5. Solution of the banded system equations (29) calculation of velocity components (25, 26) and correction of the free surfaces and streamlines (Fig. 5).
6. Numerical control of the boundary-potential surface  $S_2$  according (42).
7. Computation of the new total head  $H_0$  according (7) and (5).
8. Repeating of the computation according to until equation (41) was satisfied.

The following opening ratios were analysed:

$$\frac{a}{H} = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.$$

The calculated free surface lines for different opening ratios are plotted on Fig. 6 and the shape of the same and dimensionless lines on Fig. 7.

The calculated values of the contraction coefficient are compared on the Fig. 8 with calculated values different writers. The same values of the contraction coefficient are compared with values developed from laboratory data (Fig. 9). Fig. 10 shown the comparison the values of coefficient of discharge calculated and from a laboratory data. The pressure and velocity distributions at gate section are plotted on the Fig. 11.